

Ueber die
Bewegung eines festen Körpers
in einer
tropfbaren Flüssigkeit.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät der Universität zu Marburg

eingereicht von

Ludwig Fennel

aus Cassel.

Marburg 1888.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Heinrich Weber

in dankbarer Hochachtung

gewidmet

vom Verfasser.

Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung eines festen Körpers in einer tropfbaren Flüssigkeit ohne Reibung vor sich geht, sind die Differentialgleichungen dieses Problems zuerst von Euler und in anderer Form von Lagrange aufgestellt worden. Dieselben sind unter den Namen der Euler'schen und Lagrange'schen hydrodynamischen Gleichungen bekannt.

Allein lange Zeit hindurch war eine Integration dieser Gleichungen, selbst unter den einfachsten und beschränkendsten Annahmen, nicht vollzogen worden, so dass Navier¹⁾ glaubte, es habe dies seinen Grund in der Unvollkommenheit der bekannten Integrationsmethoden, welche nicht einmal für den Fall des einfachst gestalteten Körpers — der Kugel — und einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit von unendlicher Ausdehnung auszureichen schienen.

In der Gesamtsitzung der Berliner Akademie vom 8. Januar 1852 theilte jedoch Lejeune Dirichlet²⁾ mit, dass die Meinung Naviers grundlos sei, da sich das Problem vollständig behandeln lasse, sobald der feste Körper die Gestalt einer Kugel oder eines Ellipsoids habe und falls seine Dichte constant oder bei der Kugel in concentrischen Schalen constant sei. Er gab die Lösung vollständig für den ersten Fall, die Kugel.

Hieran anknüpfend, behandelte Clebsch die allgemeine Aufgabe im 52. Bande des Crelleschen Journals und gab die Integration der hydrodynamischen Gleichungen unter der Annahme, dass der feste Körper ein homogenes Ellipsoid ist.

Ferner beschrieb Hoppe im 93. Bande von Poggendorffs Annalen die Bewegung eines Rotationskörpers in der Richtung seiner Axe.

In ein neues Stadium trat dies Problem dadurch, dass Thomson und Tait³⁾ die Differentialgleichungen der Bewegung des festen Körpers aus dem Hamiltonschen Princip ableiteten und die Integration derselben für die einfachsten Fälle ausführten. Sie beschrieben die Bewegung eines Rotationskörpers unter der beschränkenden Annahme, dass sich derselbe um seine Rotationsaxe nicht dreht und diese eine feste Ebene nicht verlässt.

G. Kirchhoff hat dann im 71. Bande von Crelles Journal den Differentialgleichungen der Bewegung eine äusserst elegante Gestalt gegeben. Die Bedingungen unter denen er dieselben aufgestellt hat, sind diese.

Es bewegt sich ein fester Körper von beliebiger Gestalt und beliebig verteilter Masse reibungslos in einer tropfbaren, homogenen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit von unendlicher

¹⁾ Résumé des leçons de Mécanique données à l'Ecole polytechnique par Mr. Navier. pag. 480.

²⁾ Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin. 1852.

³⁾ Treatise on natural philosophy, Oxford 1867, pag. 264. Deutsch: Handbuch der theoretischen Physik I, 1. § 333.

Ausdehnung, auf deren Teilchen keine Kräfte wirken und in welcher keine Wirbelbewegungen stattfinden. Die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen sollen stetige Functionen des Orts sein, und die auf den Körper wirkenden Kräfte sollen ein Potential besitzen, das nur von der Lage des Körpers abhängt. Der Bewegungszustand des ganzen Systems soll aus dem Zustande der Ruhe hervorgegangen sein durch Kräfte, die auf den Körper wirkten.

Um das System der unter diesen Gesichtspunkten aufgestellten Differentialgleichungen integrieren zu können, nimmt dann Kirchhoff weiter an, dass die auf den festen Körper einwirkenden beschleunigenden Kräfte verschwinden.

Es sollen für diesen Fall die Differentialgleichungen nebst ihren von Kirchhoff ermittelten Integralen angeführt werden.

Das Coordinatensystem der ξ, η, ζ sei ein im Raume festes; das der x, y, z sei ein im Körper festes und dem Systeme der ξ, η, ζ congruent. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ (1) \quad \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

wo

α, β, γ die ξ, η, ζ Coordinaten des Punktes ($x = 0, y = 0, z = 0$) und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die 9 Richtungscosinus der beiden Axenkreuze zur Zeit t sind.

Die Bewegung des Körpers wird vollständig bestimmt sein, sobald man diese 12 Coefficienten in Functionen der Zeit dargestellt hat. Diese Darstellung ist mithin das Ziel der Untersuchung.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(x, \xi) & \alpha_2 &= \cos(y, \xi) & \alpha_3 &= \cos(z, \xi) \\ \beta_1 &= \cos(x, \eta) & \beta_2 &= \cos(y, \eta) & \beta_3 &= \cos(z, \eta) \\ \gamma_1 &= \cos(x, \zeta) & \gamma_2 &= \cos(y, \zeta) & \gamma_3 &= \cos(z, \zeta) \end{aligned}$$

und da beide Coordinatensysteme congruent sind:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Zwischen diesen 9 Richtungscosinus bestehen Gleichungen, die ihre gegenseitige Abhängigkeit ausdrücken und die der Vollständigkeit halber hier angeführt werden sollen. Diese sind:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ (2) \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= 0 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0 \\ (3) \quad \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0 & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 &= 0 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2 & \alpha_2 &= \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3 & \alpha_3 &= \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\ (4) \quad \beta_1 &= \gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2 & \beta_2 &= \gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3 & \beta_3 &= \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 \\ \gamma_1 &= \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 & \gamma_2 &= \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 & \gamma_3 &= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1. \end{aligned}$$

Aus dieser particulären Lösung zieht Kirchhoff dann den Schluss, dass es für jeden Körper 3 und im Allgemeinen nur 3 zu einander senkrechte Richtungen gibt, in denen derselbe in der Flüssigkeit fortschreiten kann, ohne sich zu drehen.

Als Integrale dieser Systeme gibt er an:

$$(11) \quad 2T = h$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} &= k & \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= 1 + \beta k'' - \gamma k' \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} &= k' & \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= 1' + \gamma k - \alpha k'' \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} &= k'' & \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= 1'' + \alpha k' - \beta k \end{aligned}$$

wo $h, k, k', k'', 1, 1', 1''$ willkürliche Constanten sind. Aus diesen beiden Gruppen folgen auch die Gleichungen:

$$(14) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)^2 = k^2 + k'^2 + k''^2$$

$$(15) \quad \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = kl + k' 1' + k'' 1''.$$

Liegt ein Körper vor, der in Rücksicht auf Gestalt und Massenverteilung mindestens zwei Paare aufeinander senkrecht stehender Symmetrieebenen besitzt, welche alle durch die x Axe gehen, so nimmt — bei passender Wahl des Coordinatenursprungs auf der x Axe — der Ausdruck für die doppelte kinetische Energie des ganzen Systems die Form an:

$$(16) \quad 2T = Ap^2 + B(q^2 + r^2) + A_1 u^2 + B_1(v^2 + w^2).$$

Für solche Körper, die nach Gestalt und Massenverteilung den Charakter eines Rotationskörpers besitzen, hat Kirchhoff das Problem weiter behandelt und gezeigt, dass es auf die Umkehrung elliptischer Functionen führt.

In zwei speciellen Fällen hat er dasselbe vollständig zu Ende geführt; nämlich in dem Falle, dass der Körper um seine Rotationsaxe nicht rotirt und diese Axe eine feste Ebene nicht verlässt, und zweitens, falls ein Punkt der Rotationsaxe eine Schraubenlinie beschreibt. Anknüpfend an diese Kirchhoff'sche Abhandlung, ist von Köpke¹⁾ der allgemeine Fall der Bewegung eines Rotationskörpers insofern erledigt worden, als er alle veränderlichen Coefficienten in Functionen der Zeit mit Hilfe von Thetafunctionen darstellt und die Aufgabe so der numerischen Berechnung zugänglich machte.

Diese Köpke'schen Formeln sind dann von Schülke²⁾ vereinfacht worden, und es ist gezeigt, wie man durch kleine Umformungen der Kirchhoff'schen Gleichungen in allen Fällen eine deutliche Vorstellung des Bewegungsvorganges gewinnen kann.

Clebsch hat im 3. Bande der Mathematischen Annalen das System der Kirchhoff'schen Differentialgleichungen einer genaueren Betrachtung unterzogen und drei neue Fälle angegeben, in denen das Problem auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

¹⁾ Mathematische Annalen XII. Band, pag. 387.

²⁾ Inaugural-Dissertation, Königsberg 1882.

Im 14. Bande der Mathematischen Annalen ist von Herrn Prof. H. Weber eine elegante analytische Darstellung der Bewegung eines festen Körpers, welcher drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzt, mittels Thetafunctionen zweier Variablen gegeben worden. In dem vierten Paragraphen dieser Abhandlung ist gezeigt, wie man zu einer Lösung dieses Problems auch durch die Umkehrung hyperelliptischer Integrale gelangt.

„Auf Grund der in diesem Paragraphen entwickelten Formeln sollen nun alle die Fälle ermittelt und behandelt werden, in denen sich die Bewegung eines festen Körpers vom Charakter des dreiaxigen Ellipsoids durch die Umkehrung elliptischer Integrale, d. h. durch elliptische Functionen und elliptische Transcendenten darstellen lässt.“

Die doppelte kinetische Energie des ganzen Systems ist in diesem Falle:

$$(17) 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_1 u^2 + B_1 v^2 + C_1 w^2$$

es wird:

$$(17^*) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= Ap, & \frac{\partial T}{\partial q} &= Bq, & \frac{\partial T}{\partial r} &= Cr; \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= A_1 u, & \frac{\partial T}{\partial v} &= B_1 v, & \frac{\partial T}{\partial w} &= C_1 w. \end{aligned}$$

Es ist angenommen, dass zwischen den ihrer Natur nach positiven Constanten des Körpers die Beziehung besteht:

$$(18) AA_1 (C_1 - B_1) + BB_1 (A_1 - C_1) + CC_1 (B_1 - A_1) = 0.$$

Setzt man in den Kirchhoff'schen Integralgleichungen $k' = k'' = 0$, wodurch man über die Richtung der ξ Axe, und ferner $l' = l'' = 0$, wodurch man über die Lage derselben verfügt, — was beides ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann —, so lauten diese Gleichungen 11, 12 und 13:

$$(11) 2T = h$$

$$(12^*) \quad \begin{aligned} A_1 \alpha_1 u + B_1 \alpha_2 v + C_1 \alpha_3 w &= k & A \alpha_1 p + B \alpha_2 q + C \alpha_3 r &= l \\ A_1 \beta_1 u + B_1 \beta_2 v + C_1 \beta_3 w &= 0 & (13^*) A \beta_1 p + B \beta_2 q + C \beta_3 r &= \gamma k \\ A_1 \gamma_1 u + B_1 \gamma_2 v + C_1 \gamma_3 w &= 0 & A \gamma_1 p + B \gamma_2 q + C \gamma_3 r &= -\beta k. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 12* werden befriedigt durch:

$$(19) A_1 \cdot u = k \alpha_1, \quad B_1 \cdot v = k \alpha_2, \quad C_1 \cdot w = k \alpha_3,$$

was aus den Gruppen (2) und (3) leicht ersichtlich ist.

Es ist:

$$(20) k = + \sqrt{A^2_1 u^2_0 + B^2_1 v^2_0 + C^2_1 w^2_0},$$

wo die mit dem Zeiger 0 versehenen Buchstaben die Geschwindigkeitscomponenten zur Anfangszeit t_0 bedeuten.

Setzt man $l = 0$, was eine Beschränkung der Allgemeinheit ist, so wird aus (13*):

$$(21) A \alpha_1 p + B \alpha_2 q + C \alpha_3 r = 0. \quad (22) \quad \begin{aligned} A \beta_1 p + B \beta_2 q + C \beta_3 r &= k\gamma, \\ A \gamma_1 p + B \gamma_2 q + C \gamma_3 r &= -k\beta. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (10) werden:

$$\begin{aligned} A \, Dp &= (C - B) \, qr + k^2 \frac{C_1 - B_1}{C_1 \, B_1} \alpha_2 \alpha_3 \\ (23) \, B \, Dq &= (A - C) \, rp + k^2 \frac{A_1 - C_1}{A_1 \, C_1} \alpha_3 \alpha_1 \\ C \, Dr &= (B - A) \, pq + k^2 \frac{B_1 - A_1}{B_1 \, A_1} \alpha_1 \alpha_2, \end{aligned}$$

als deren Integrale man findet:

$$\begin{aligned} \alpha^2_1 &= 1 + \frac{A_1 \, C_1 \, B}{k^2(A_1 - C_1)} q^2 - \frac{B_1 \, A_1 \, C}{k^2(B_1 - A_1)} r^2 \\ (24) \, \alpha^2_2 &= m + \frac{B_1 \, A_1 \, C}{k^2(B_1 - A_1)} r^2 - \frac{C_1 \, B_1 \, A}{k^2(C_1 - B_1)} q^2 \\ \alpha^2_3 &= n + \frac{C_1 \, B_1 \, A}{k^2(C_1 - B_1)} p^2 - \frac{A_1 \, C_1 \, B}{k^2(A_1 - C_1)} q^2 \end{aligned}$$

wo l, m, n willkürliche Constanten sind, welche der Bedingung genügen müssen:

$$1 + m + n = 1.$$

Es sind nun an Stelle von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zwei neue Veränderliche x_1 und x_2 , und ferner fünf neue Constanten eingeführt, indem gesetzt wurde:

$$\begin{aligned} \alpha^2_1 &= \frac{\delta_1 - x_1}{\delta_1 - \delta_2} \cdot \frac{\delta_1 - x_2}{\delta_1 - \delta_3} & l &= \frac{\delta_1 - \delta_4}{\delta_1 - \delta_2} \cdot \frac{\delta_1 - \delta_5}{\delta_1 - \delta_3} \\ (25) \, \alpha^2_2 &= \frac{\delta_2 - x_1}{\delta_2 - \delta_3} \cdot \frac{\delta_2 - x_2}{\delta_2 - \delta_1} & (26) \, m &= \frac{\delta_2 - \delta_4}{\delta_2 - \delta_3} \cdot \frac{\delta_2 - \delta_5}{\delta_2 - \delta_1} \\ \alpha^2_3 &= \frac{\delta_3 - x_1}{\delta_3 - \delta_1} \cdot \frac{\delta_3 - x_2}{\delta_3 - \delta_2} & n &= \frac{\delta_3 - \delta_4}{\delta_3 - \delta_1} \cdot \frac{\delta_3 - \delta_5}{\delta_3 - \delta_2} \end{aligned}$$

Bedeutend μ und ν willkürliche Constanten, so wird allen Anforderungen genügt, wenn man setzt:

$$(27) \, \delta_1 = \frac{\mu}{A} + \nu, \quad \delta_2 = \frac{\mu}{B} + \nu, \quad \delta_3 = \frac{\mu}{C} + \nu.$$

Es soll gewählt werden $\mu > 0$ falls $A > B > C$

$\mu < 0$ falls $A < B < C$,

so dass stets:

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta_3.$$

Man findet die Veränderlichen x_1 und x_2 zu jedem reellen Wertsysteme der $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eindeutig und reell als die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{\alpha^2_1}{x - \delta_1} + \frac{\alpha^2_2}{x - \delta_2} + \frac{\alpha^2_3}{x - \delta_3} = 0$$

und es liegen die Wurzeln so, dass

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < x_2 < \delta_3.$$

Die Constanten δ_4 und δ_5 ergeben sich in ähnlicher Weise als Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{l}{\delta - \delta_1} + \frac{m}{\delta - \delta_2} + \frac{n}{\delta - \delta_3} = 0.$$

Ihre Wurzeln δ_4 und δ_5 sollen, so gegen x_1 und x_2 liegen, dass

$$(29) \quad x_1 < \delta_4 < x_2 < \delta_5.$$

Es ist dies erforderlich, damit p , q , r reelle Werte erhalten; was die nachstehende Gleichungsgruppe lehrt, die eine Folge der Integralgleichungen (21) und (24) und der Definitionsgleichungen (25) von x_1 und x_2 ist.

Setzt man:

$$\Delta = (\delta_2 - \delta_3) (\delta_3 - \delta_1) (\delta_1 - \delta_2) \\ \sqrt{1, 2, 3, 4, 5, x} = \sqrt{(\delta_1 - x) (\delta_2 - x) (\delta_3 - x) (\delta_4 - x) (\delta_5 - x)}$$

so wird:

$$(30) \quad \begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\Delta} (x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{1, 4, 5, x_1} \sqrt{2, 3, x_2} - \sqrt{1, 4, 5, x_2} \sqrt{2, 3, x_1} \right\} \\ q &= \sqrt{\frac{A_1 - C_1}{B C_1 A_1}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\Delta} (x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{2, 4, 5, x_1} \sqrt{3, 1, x_2} - \sqrt{2, 4, 5, x_2} \sqrt{3, 1, x_1} \right\} \\ r &= \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\Delta} (x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{3, 4, 5, x_1} \sqrt{1, 2, x_2} - \sqrt{3, 4, 5, x_2} \sqrt{1, 2, x_1} \right\} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (7) bestimmen p , q , r eindeutig. Durch Eintragung der Werte p , q , r , α_1 , α_2 , α_3 aus den Gruppen (25) und (30) in die Gruppe (7) findet man:

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{2 k \sqrt{\lambda}}{\mu (x_1 - x_2)} R (x_1) (x_2 - \nu) & \frac{dx_1}{R (x_1)} + \frac{dx_2}{R (x_2)} &= \frac{2 k \sqrt{\lambda}}{\mu} dt \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{2 k \sqrt{\lambda}}{\mu (x_2 - x_1)} R (x_2) (x_1 - \nu) & \frac{x_1 dx_1}{R (x_1)} + \frac{x_2 dx_2}{R (x_2)} &= \frac{2 k \sqrt{\lambda}}{\mu} \nu dt. \end{aligned} \quad \text{oder: (31*)}$$

$$\text{Es ist: } R (x) = \sqrt{-(\delta_1 - x) (\delta_2 - x) (\delta_3 - x) (\delta_4 - x) (\delta_5 - x)}.$$

λ bedeutet eine willkürliche Constante, die wir positiv nehmen, sobald $A_1 < B_1 < C_1$ ist, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf.

Es bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda (\delta_2 - \delta_3) &= \frac{A (B_1 - C_1)}{B_1 C_1} = -\lambda \mu \frac{B - C}{B C} \\ \lambda (\delta_3 - \delta_1) &= \frac{B (C_1 - A_1)}{C_1 A_1} = -\lambda \mu \frac{C - A}{C A} \\ \lambda (\delta_1 - \delta_2) &= \frac{C (A_1 - B_1)}{A_1 B_1} = -\lambda \mu \frac{A - B}{A B} \end{aligned}$$

λ und μ hängen mithin derart von einander ab dass:

$$-\lambda \mu \frac{A_1 B_1 C_1}{A B C} = \frac{A_1 (B_1 - C_1)}{B - C} = \frac{B_1 (C_1 - A_1)}{C - A} = \frac{C_1 (A_1 - B_1)}{A - B}.$$

Durch Integration der Gleichungen (31*) und Umkehrung der auftretenden hyperelliptischen Integrale findet man x_1 und x_2 in Function der Zeit, und kann somit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p, q, r$ als Functionen der Zeit darstellen.

Die Ermittlung der übrigen Unbekannten des Problems erfordert noch zwei Quadraturen. Bezeichnen p', q', r' — wie schon erwähnt — die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen der ξ, η, ζ , so hat man:

$$(32) \quad \begin{aligned} p' &= \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r \\ q' &= \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r \\ r' &= \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \end{aligned} \quad p'^2 + q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Aus der ersten Gleichung der Gruppe (32) ergibt sich p' ; aus den beiden letzten findet man unter Rücksichtnahme auf die Gruppen (4) und (7):

$$r' Dq' - q' Dr' = D\alpha_1 Dp + D\alpha_2 Dq + D\alpha_3 Dr$$

also:

$$D \arctang \frac{q'}{r'} = \frac{D\alpha_1 Dp + D\alpha_2 Dq + D\alpha_3 Dr}{p^2 + q^2 + r^2 - p'^2}.$$

Durch eine Quadratur wird $\arctg \frac{q'}{r'}$ gefunden; nimmt man die Gleichung hinzu:

$$q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2 - p'^2,$$

so findet man q und r in Function der x_1 und x_2 . Hiernach wiederum erhält man $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch Auflösen der linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta_1 D\alpha_1 + \beta_2 D\alpha_2 + \beta_3 D\alpha_3 &= r & \gamma_1 D\alpha_1 + \gamma_2 D\alpha_2 + \gamma_3 D\alpha_3 &= -q \\ \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r &= q & \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r &= r \\ \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3 &= 0, & \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

deren Determinante von Null verschieden ist;

$$\text{Dieselbe ist: } (D\alpha_1)^2 + (D\alpha_2)^2 + (D\alpha_3)^2 = q'^2 + r'^2.$$

Auf diese Weise findet man:

$$\begin{aligned} p' &= \frac{k \sqrt{\lambda}}{\mu (x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{4, 5, x_1} \sqrt{1, 2, 3, x_2} - \sqrt{4, 5, x_2} \sqrt{1, 2, 3, x_1} \right\}, \\ q' &= \frac{k \sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot \frac{\nu - \delta_4}{\sqrt{\delta_5 - \delta_4}} \sqrt{(\delta_5 - x_1) (\delta_5 - x_2)}, \\ r' &= \frac{k \sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot \frac{\nu - \delta_5}{\sqrt{\delta_4 - \delta_5}} \sqrt{(\delta_4 - x_1) (\delta_4 - x_2)}; \\ \beta_1 &= \frac{\sqrt{2, 3, 5, x_2} \sqrt{1, 4, x_1} - \sqrt{2, 3, 5, x_1} \sqrt{1, 4, x_2}}{(x_1 - x_2) \sqrt{(\delta_1 - \delta_2) (\delta_1 - \delta_3) (\delta_5 - \delta_4)}}, \end{aligned}$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{3, 1, 5, x_2} \sqrt{2, 4, x_1} - \sqrt{3, 1, 5, x_1} \sqrt{2, 4, x_2}}{(x_1 - x_2) \sqrt{(\delta_2 - \delta_3) (\delta_2 - \delta_1) (\delta_5 - \delta_4)}},$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{1, 2, 5, x_2} \sqrt{3, 4, x_1} - \sqrt{1, 2, 5, x_1} \sqrt{3, 4, x_2}}{(x_1 - x_2) \sqrt{(\delta_3 - \delta_1) (\delta_3 - \delta_2) (\delta_5 - \delta_4)}};$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2, 3, 4, x_2} \sqrt{1, 5, x_1} - \sqrt{2, 3, 4, x_1} \sqrt{1, 5, x_2}}{(x_1 - x_2) \sqrt{(\delta_1 - \delta_2) (\delta_1 - \delta_3) (\delta_4 - \delta_5)}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{3, 1, 4, x_2} \sqrt{2, 5, x_1} - \sqrt{3, 1, 4, x_1} \sqrt{2, 5, x_2}}{(x_1 - x_2) \sqrt{(\delta_2 - \delta_3) (\delta_2 - \delta_1) (\delta_4 - \delta_5)}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{1, 2, 4, x_2} \sqrt{3, 5, x_1} - \sqrt{1, 2, 4, x_1} \sqrt{3, 5, x_2}}{(x_1 - x_2) \sqrt{(\delta_3 - \delta_1) (\delta_3 - \delta_2) (\delta_4 - \delta_5)}}.$$

Aus der Gleichungsgruppe (22) ergibt sich:

$$\beta = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\delta_4 - \delta_5}} \sqrt{(\delta_4 - x_1) (\delta_4 - x_2)}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\delta_5 - \delta_4}} \sqrt{(\delta_5 - x_1) (\delta_5 - x_2)}.$$

Die erste Gleichung der Gruppe (6) liefert:

$$D\alpha = k \left\{ \frac{\alpha_1^2}{A_1} + \frac{\alpha_2^2}{B_1} + \frac{\alpha_3^2}{C_1} + \right\},$$

hieraus wird:

$$D\alpha = \frac{h}{k} - \frac{\lambda k}{\mu} (\nu - \delta_4) (\nu - \delta_5) + \frac{\lambda k}{\mu} (\nu - x_1) (\nu - x_2),$$

wo: $h = k^2 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} \right).$

und endlich:

$$\alpha = \left\{ \frac{h}{k} + \frac{\lambda k \nu}{\mu} (\delta_4 + \delta_5) - \frac{\lambda k}{\mu} \delta_4 \delta_5 \right\} t - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left\{ \int \frac{x_1^2 dx_1}{R(x_1)} + \int \frac{x_2^2 dx_2}{R(x_2)} \right\}$$

Durch diese Formeln sind alle zwölf Coefficienten, welche die Bewegung des festen Körpers in der Flüssigkeit bestimmen, eindeutig in Functionen der x_1 und x_2 ausgedrückt; und diese findet man wiederum durch Umkehrung hyperelliptischer Integrale als Functionen der Zeit.

Die Ungleichungen (28) und (29) lehren, dass im Ganzen vier verschiedene Fälle möglich, die in nachstehender Tafel aufgeführt sind.

I	$\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3$
II	$\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$
III	$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 < \delta_3$
IV	$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$

Der Zweck dieser Arbeit ist nun — wie schon oben erwähnt — alle jene Fälle zu ermitteln und zu behandeln, in denen die hyperelliptischen Integrale zu elliptischen werden, unter der Voraussetzung, dass der feste Körper in Bezug auf Gestalt und Massenverteilung den Charakter des dreiaxigen Ellipsoids behält. Es sind mithin die Fälle aufzusuchen, in denen der Radikand von $R(x)$ von nicht höherem als vierten Grade wird, ohne dass unter den drei Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ zwei einander gleich werden. Dies tritt ein, falls δ_4 oder δ_5 in eine der drei Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ übergeht oder falls $\delta_4 = \delta_5$ wird. Mit Rücksicht auf obige Tafel ergeben sich im Ganzen folgende neun Fälle:

1. $\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 = \delta_3$
2. $\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 = \delta_3$
3. $\delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3$
4. $\delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$
5. $\delta_1 = x_1 = \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3$
6. $\delta_1 = x_1 = \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$
7. $\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 = x_2 = \delta_5 < \delta_3$
8. $\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_3 < \delta_5$
9. $\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_5 < \delta_3$

Bevor wir zur Betrachtung der einzelnen Fälle schreiten, sollen die Integrale, durch deren Umkehrung wir die Hilfsveränderlichen x_1 und x_2 oder ihre transformirten Werte in Function der Zeit darstellen, unter der Annahme behandelt werden, dass irgend zwei und nur zwei der fünf Grössen δ einander gleich sind.

Wir setzen: $\varepsilon = \delta_i = \delta_k$ ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5$)

und bezeichnen die drei übrigen δ ihrer Grösse nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, so dass:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

Dann wird: $R(x) = (\varepsilon - x) \Re(x)$,

$$\text{wo: } \Re(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)}.$$

Die Differentialgleichungen (31*) werden:

$$\frac{dx_1}{(\varepsilon - x_1) \Re(x_1)} + \frac{dx_2}{(\varepsilon - x_2) \Re(x_2)} = \frac{2k \sqrt{\lambda}}{\mu} dt$$

$$\frac{x_1 dx_1}{(\varepsilon - x_1) \Re(x_1)} + \frac{x_2 dx_2}{(\varepsilon - x_2) \Re(x_2)} = \frac{2k \sqrt{\lambda}}{\mu} \nu dt.$$

oder:

$$\frac{dx_1}{\Re(x_1)} + \frac{dx_2}{\Re(x_2)} = 2k \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} dt$$

$$\frac{(\varepsilon_1 - x_1) dx_1}{(\varepsilon - x_1) \Re(x_1)} + \frac{(\varepsilon_1 - x_2) dx_2}{(\varepsilon - x_2) \Re(x_2)} = 2k \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} dt.$$

Haben x_1 und x_2 zur Zeit $t = 0$ die Werte $x_1^{(0)}$ und $x_2^{(0)}$, so lauten die Integralgleichungen des Problems:

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{dx}{\Re(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{dx}{\Re(x)} = 2k \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} t,$$

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x} \cdot \frac{dx}{\Re(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x} \cdot \frac{dx}{\Re(x)} = 2k \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \cdot t;$$

$$\text{wo: } \Re(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)},$$

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

$$\text{Setzt man: } x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) z^2, \quad \varepsilon_3 - x = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) (1 - \kappa^2 z^2),$$

$$\varepsilon_2 - x = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - z^2), \quad \varepsilon - x = (\varepsilon - \varepsilon_1) (1 - \kappa^2 a^2 z^2),$$

$$\text{wo: } \kappa^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \quad a^2 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1},$$

so lauten diese Gleichungen, nachdem man beide Seiten der zweiten mit $\frac{\sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - \kappa^2 a^2}}{a}$ multipliziert hat:

$$\int_{z_1^{(0)}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}} + \int_{z_2^{(0)}}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}} = k \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t$$

$$\int_{z_1^{(0)}}^{z_1} \frac{\kappa^2 a \sqrt{1 - a^2} \cdot \sqrt{1 - \kappa^2 a^2} \cdot z^2 dz}{(1 - \kappa^2 a^2 z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}} + \int_{z_2^{(0)}}^{z_2} \frac{\kappa^2 a^2 \sqrt{1 - a^2} \cdot \sqrt{1 - \kappa^2 a^2} \cdot z^2 dz}{(1 - \kappa^2 a^2 z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}}$$

$$= -k \sqrt{\lambda} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3)}{\varepsilon - \varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \cdot t.$$

Setzt man ferner:

$$u_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}}, \quad u_2 = \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}},$$

$$u_1^{(0)} = \int_0^{z_1^{(0)}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}}, \quad u_2^{(0)} = \int_0^{z_2^{(0)}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}},$$

$$z_1 = \operatorname{sinam} u_1, \quad z_1^{(0)} = \operatorname{sinam} u_1^{(0)}, \quad z_2 = \operatorname{sinam} u_2, \quad z_2^{(0)} = \operatorname{sinam} u_2^{(0)},$$

$$a = \operatorname{sinam} \omega,$$

und bezeichnet man mit $\Pi(u, \omega)$ das elliptische Integral dritter Gattung, so dass:

$$\Pi(u, \omega) = \int_0^u \frac{x^2 s(\omega) c(\omega) \delta(\omega) z^2 dz}{(1-x^2 s^2(\omega) z^2) \sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}},$$

so werden die Integralgleichungen:

$$u_1 + u_2 = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t.$$

$$\Pi(u_1, \omega) + \Pi(u_2, \omega) = \Pi(u_1^{(0)}, \omega) + \Pi(u_2^{(0)}, \omega) - k \sqrt{\lambda \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3)}{\varepsilon - \varepsilon_1}} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \cdot t.$$

Nun ist: $\Pi(u, \omega) = u Z(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - \omega)}{\Theta(u + \omega)}$, falls Θ die Jacobische Thetafunction und Z die Zetafunction bezeichnet, so dass:

$$Z(\omega) = \frac{d \log \Theta(\omega)}{d\omega}.$$

Es wird:

$$\Pi(u_1) + \Pi(u_2) = (u_1 + u_2) Z(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u_1 - \omega) \Theta(u_2 - \omega)}{\Theta(u_1 + \omega) \Theta(u_2 + \omega)}$$

und mithin die zweite Gleichung:

$$\frac{\Theta(u_1 - \omega) \Theta(u_2 - \omega)}{\Theta(u_1 + \omega) \Theta(u_2 + \omega)} = \frac{\Theta(u_1^{(0)} - \omega) \Theta(u_2^{(0)} - \omega)}{\Theta(u_1^{(0)} + \omega) \Theta(u_2^{(0)} + \omega)} \cdot e^{-2 \text{const.} \cdot t}.$$

Die Integralgleichungen kann man schreiben:

$$u_1 + u_2 = \sigma$$

$$\frac{\Theta(u_1 - \omega) \Theta(u_2 - \omega)}{\Theta(u_1 + \omega) \Theta(u_2 + \omega)} = e^{-2\tau}$$

wo σ und τ lineare Functionen der Zeit sind; nämlich:

$$\sigma = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \cdot \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t.$$

$$\tau = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u_1^{(0)} + \omega) \Theta(u_2^{(0)} + \omega)}{\Theta(u_1^{(0)} - \omega) \Theta(u_2^{(0)} - \omega)}$$

$$+ k \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} Z(\omega) + \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_2 \cdot \varepsilon - \varepsilon_3}{\varepsilon - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \right\} t.$$

Nach art. 54 der Fund. nov. Jacobis ist nun:

$$\frac{\Theta(u_1 - \omega) \Theta(u_2 - \omega) \Theta(u_1 + u_2 + \omega)}{\Theta(u_1 + \omega) \Theta(u_2 + \omega) \Theta(u_1 + u_2 - \omega)} = \frac{1 - \kappa^2 s(\omega) s(u_1 + u_2 - \omega) s(u_1) s(u_2)}{1 + \kappa^2 s(\omega) s(u_1 + u_2 + \omega) s(u_1) s(u_2)}$$

daher wird:

$$\frac{1 - \kappa^2 s(\omega) s(u_1 + u_2 - \omega) s(u_1) s(u_2)}{1 + \kappa^2 s(\omega) s(u_1 + u_2 + \omega) s(u_1) s(u_2)} = e^{-2\tau} \cdot \frac{\Theta(\sigma + \omega)}{\Theta(\sigma - \omega)}.$$

$$\text{Setzt man: } s(u_1 + u_2 - \omega) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{H(\sigma - \omega)}{\Theta(\sigma - \omega)}, \quad s(u_1 + u_2 + \omega) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{H(\sigma + \omega)}{\Theta(\sigma + \omega)},$$

und berechnet aus der letzten Gleichung $\kappa \cdot s(u_1) \cdot s(u_2)$, so wird:

$$\kappa \cdot s(u_1) \cdot s(u_2) = \frac{\Theta(\omega)}{H(\omega)} \cdot \frac{e^{\tau} \Theta(\sigma - \omega) - e^{-\tau} \Theta(\sigma + \omega)}{e^{\tau} H(\sigma - \omega) + e^{-\tau} H(\sigma + \omega)}.$$

Man kann aus den Additionstheoremen für cosam und Δ am leicht die Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} c(u_1) \cdot c(u_2) &= c(u_1 + u_2) + \delta(u_1 + u_2) \cdot s(u_1) s(u_2) \\ \delta(u_1) \cdot \delta(u_2) &= \delta(u_1 + u_2) + \kappa^2 \cdot c(u_1 + u_2) \cdot s(u_1) s(u_2). \end{aligned}$$

Aus diesen kann man auch $c(u_1) \cdot c(u_2)$ und $\delta(u_1) \cdot \delta(u_2)$ durch Thetafunctionen und Exponentialfunctionen, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind, darstellen.

Es soll hier aber ein besserer Weg angegeben werden, zur Berechnung dieser Producte, der nämlich, welchen Rosenhain im ersten Capitel seiner preisgekrönten Abhandlung¹⁾ über vierfach periodische Functionen eingeschlagen hat.

Setzt man: $s = \frac{\tau}{2K}$, $v_1 = \frac{u_1}{2K}$, $v_2 = \frac{u_2}{2K}$, $b = \frac{\omega}{2K}$, wo K das vollständige elliptische Integral erster Gattung bedeutet, so wird:

$$e^{-2\tau} = \frac{\mathcal{J}_{01}(v_1 - b) \mathcal{J}_{01}(v_2 - b)}{\mathcal{J}_{01}(v_1 + b) \mathcal{J}_{01}(v_2 + b)}.$$

Mit Hülfe von Beziehungen, welche zwischen den vier Thetafunctionen erster Ordnung bestehen, kann man diesen Quotienten auf drei Arten darstellen. Es wird dann:

$$\begin{aligned} e^{-2\tau} &= \frac{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2) \mathcal{J}_{01}(b) \mathcal{J}_{01}(s - b) - \mathcal{J}_{11}(v_1) \mathcal{J}_{11}(v_2) \mathcal{J}_{11}(b) \mathcal{J}_{11}(s - b)}{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2) \mathcal{J}_{01}(b) \mathcal{J}_{01}(s + b) + \mathcal{J}_{11}(v_1) \mathcal{J}_{11}(v_2) \mathcal{J}_{11}(b) \mathcal{J}_{11}(s + b)}, \\ e^{-2\tau} &= \frac{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2) \mathcal{J}_{00}(b) \mathcal{J}_{00}(s - b) - \mathcal{J}_{10}(v_1) \mathcal{J}_{10}(v_2) \mathcal{J}_{11}(b) \mathcal{J}_{11}(s - b)}{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2) \mathcal{J}_{00}(b) \mathcal{J}_{00}(s + b) + \mathcal{J}_{10}(v_1) \mathcal{J}_{10}(v_2) \mathcal{J}_{11}(b) \mathcal{J}_{11}(s + b)}, \\ e^{-2\tau} &= \frac{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2) \mathcal{J}_{10}(b) \mathcal{J}_{10}(s - b) - \mathcal{J}_{00}(v_1) \mathcal{J}_{00}(v_2) \mathcal{J}_{11}(b) \mathcal{J}_{11}(s - b)}{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2) \mathcal{J}_{10}(b) \mathcal{J}_{10}(s + b) + \mathcal{J}_{00}(v_1) \mathcal{J}_{00}(v_2) \mathcal{J}_{11}(b) \mathcal{J}_{11}(s + b)}. \end{aligned}$$

Aus den letzten Gleichungen berechnen sich leicht die Ausdrücke:

$$\frac{\mathcal{J}_{11}(v_1) \mathcal{J}_{11}(v_2)}{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2)}, \quad \frac{\mathcal{J}_{10}(v_1) \mathcal{J}_{10}(v_2)}{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2)}, \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}_{00}(v_1) \mathcal{J}_{00}(v_2)}{\mathcal{J}_{01}(v_1) \mathcal{J}_{01}(v_2)}.$$

¹⁾ Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Sciences mathématiques et physiques. Tome XI.

Man findet:

$$\frac{\mathfrak{J}_{11}(v_1) \mathfrak{J}_{11}(v_2)}{\mathfrak{J}_{01}(v_1) \mathfrak{J}_{01}(v_2)} = \frac{\mathfrak{J}_{01}(b)}{\mathfrak{J}_{11}(b)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{11}(s+b)} = \kappa s(u_1) s(u_2),$$

$$\frac{\mathfrak{J}_{10}(v_1) \mathfrak{J}_{10}(v_2)}{\mathfrak{J}_{01}(v_1) \mathfrak{J}_{01}(v_2)} = \frac{\mathfrak{J}_{00}(b)}{\mathfrak{J}_{11}(b)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{00}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{00}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{11}(s+b)} = \frac{\kappa}{\kappa'} c(u_1) c(u_2),$$

$$\frac{\mathfrak{J}_{00}(v_1) \mathfrak{J}_{00}(v_2)}{\mathfrak{J}_{01}(v_1) \mathfrak{J}_{01}(v_2)} = \frac{\mathfrak{J}_{10}(b)}{\mathfrak{J}_{11}(b)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{10}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{11}(s+b)} = \frac{1}{\kappa'} \delta(u_1) \delta(u_2).$$

$$\text{Setzt man: } \psi(u_1) = \sqrt{1 - \kappa^2 a^2 s^2(u_1)}, \quad \psi(u_2) = \sqrt{1 - \kappa^2 a^2 s^2(u_2)},$$

so findet man nach einigen Umformungen:

$$\psi(u_1) \cdot \psi(u_2) = \frac{\mathfrak{J}_{01} \mathfrak{J}_{10}(b) \mathfrak{J}_{00}(b)}{\mathfrak{J}_{10} \mathfrak{J}_{00}^{(0)} \mathfrak{J}_{01}(b)} \frac{2 \mathfrak{J}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{11}(s+b)}.$$

Es lässt sich nun eine quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln $s^2(u_1)$ und $s^2(u_2)$ sind. Dieselbe lautet:

$$\frac{1}{1 - \xi^2} \cdot \frac{c^2(u_1) c^2(u_2)}{\kappa'^2 \cdot \delta^2(\omega)} - \frac{1}{1 - \kappa^2 \xi^2} \cdot \frac{\delta^2(u_1) \delta^2(u_2)}{\kappa^2 \kappa'^2 c^2(\omega)} + \frac{1}{1 - \kappa^2 a^2 \xi^2} \cdot \frac{\psi^2(u_1) \psi^2(u_2)}{\kappa^2 c^2(\omega) \delta^2(\omega)} = 0.$$

und wird nach Einführung der Thetafunctionen und nach einiger Umformung:

$$\frac{\mathfrak{J}_{00}^2 \left\{ e^{\tau} \mathfrak{J}_{00}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{00}(s+b) \right\}^2}{1 - \xi^2} - \frac{\mathfrak{J}_{10}^2 \left\{ e^{\tau} \mathfrak{J}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{10}(s+b) \right\}^2}{1 - \kappa^2 \xi^2} + \frac{4 \mathfrak{J}_{11}^2(b) \mathfrak{J}_{11}^2(s)}{1 - \kappa^2 a^2 \xi^2} = 0.$$

Nachdem man durch Auflösen dieser Gleichung $s(u_1)$ und $s(u_2)$ gefunden hat, ergeben sich leicht die Grössen $c(u_1)$, $c(u_2)$, $\delta(u_1)$, $\delta(u_2)$, $\psi(u_1)$, $\psi(u_2)$ in Function der Zeit.

Es kommt jedoch nicht darauf an, diese acht Functionen gesondert darzustellen; vielmehr ist es von Wichtigkeit, die Verbindungen dieser Functionen zu berechnen, durch welche die Coefficienten des Problems ausgedrückt werden.

Rosenhain gibt im ersten Capitel seiner erwähnten, berühmten Abhandlung im art. 8 in der Gleichungsgruppe (31) eine elegante Darstellung von 11 Verbindungen obiger acht Functionen. Setzt man der Kürze halber:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= s(u_1), & \eta_1 &= c(u_1), & \zeta_1 &= \delta(u_1), & \psi_1 &= \psi(u_1), \\ \xi_2 &= s(u_2), & \eta_2 &= c(u_2), & \zeta_2 &= \delta(u_2), & \psi_2 &= \psi(u_2), \\ \kappa'^2 &= 1 - \kappa^2, & \lambda^2 &= \kappa^2 a^2, & \lambda_1^2 &= 1 - \lambda^2, & \lambda_{\kappa^2}^2 &= \kappa^2 - \lambda^2, \end{aligned}$$

$$\text{und: } \varphi = e^{\tau} \mathfrak{J}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{11}(s+b).$$

so lautet diese Gruppe:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sqrt{\kappa} \cdot \lambda \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 = \frac{\varphi^1}{\varphi} \\
 2. \quad & \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa'}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot \eta^1 \cdot \eta^2 = \frac{\varphi^2}{\varphi} \\
 3. \quad & \sqrt{\frac{1}{\kappa'}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_\kappa} \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 = \frac{\varphi^3}{\varphi} \\
 4. \quad & \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_\kappa} \cdot \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta^2 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 \right\} = \frac{\varphi^4}{\varphi} \\
 5. \quad & \frac{\sqrt{\kappa}}{\lambda_1 \lambda_\kappa} \cdot \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_1 \eta^2 \zeta_2 \psi_1^2 \right\} = \frac{\varphi^5}{\varphi} \\
 6. \quad & \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa_1}} \cdot \frac{1}{\lambda_\kappa} \cdot \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta^2 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \psi_1^2 \right\} = \frac{\varphi^6}{\varphi} \\
 7. \quad & \frac{1}{\sqrt{\kappa'} \lambda_1} \cdot \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \psi_2^2 - \xi_2 \eta^2 \zeta_1 \psi_1^2 \right\} = \frac{\varphi^7}{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Diese sieben Quotienten sind dreifach periodische Functionen ihrer Argumente. Den Periodicitätsindices $0, -\frac{i\pi\omega}{K}, i\pi$ von τ entsprechen in derselben Reihenfolge die Indices $1, i \frac{K'}{K}, 0$ von s .

Die Functionen φ_1 bis φ_7 entstehen — abgesehen von einem Exponentialfactor — aus φ , indem man seine Argumente um die Hälften conjugirter Indices vermehrt.

Es wird:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= e^{\tau} \vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau} \vartheta_{01}(s+b) & \varphi_5 &= e^{\tau} \vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau} \vartheta_{01}(s+b) \\
 \varphi_2 &= e^{\tau} \vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau} \vartheta_{00}(s+b) & \varphi_6 &= e^{\tau} \vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau} \vartheta_{00}(s+b) \\
 \varphi_3 &= e^{\tau} \vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau} \vartheta_{10}(s+b) & \varphi_7 &= e^{\tau} \vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau} \vartheta_{10}(s+b) \\
 \varphi_4 &= e^{\tau} \vartheta_{11}(s-b) - e^{-\tau} \vartheta_{11}(s+b) & \varphi &= e^{\tau} \vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau} \vartheta_{11}(s+b). \\
 8. \quad & \frac{\kappa}{\lambda_1 \lambda_\kappa} \psi_1 \cdot \psi_2 = 2 \frac{\vartheta_{01}(b) \vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{01} \cdot \varphi} \\
 9. \quad & \frac{\sqrt{\kappa}}{\lambda_1 \lambda_\kappa} \frac{\psi_1 \cdot \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta^2 \zeta_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \right\} = 2 \frac{\vartheta_{01}(b) \vartheta_{01}(s)}{\vartheta_{01} \cdot \varphi} \\
 10. \quad & \frac{\sqrt{\kappa}}{\kappa'} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_\kappa} \frac{\psi_1 - \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta^2 \zeta_1 - \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \right\} = 2 \frac{\vartheta_{01}(b) \vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{01} \cdot \varphi} \\
 11. \quad & \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa'}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_\kappa} \frac{\psi_1 \cdot \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 - \xi_2 \eta^2 \zeta_1 \right\} = 2 \frac{\vartheta_{01}(b) \vartheta_{10}(s)}{\vartheta_{01} \cdot \varphi}.
 \end{aligned}$$

Auch diese vier Verbindungen von elliptischen Functionen sind ebenso wie die sieben zuerst angegebenen dreifach periodische Functionen der Argumente s und τ . Auch ihre Periodicität ist derartig, dass den drei Indices $1, i \frac{K'}{K}, 0$ der Veränderlichen s die drei Indices $0, 2i\pi b, i\pi$ von τ in derselben Reihenfolge zugeordnet sind.

Alle elf angeführten Verbindungen von elliptischen Functionen werden in den vier ersten Fällen unseres Problems eine Rolle spielen.

In den **beiden ersten** Fällen ist: $0 < z_1^2 < 1 < \frac{1}{\kappa^2} < z_2^2 < \frac{1}{\kappa^2 a^2}$.

Wir setzen daher:

$$\xi_1 = z_1 = \sinam u_1, \quad u_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$$

$$\xi_2 = z_2 = \sinam (u_2 + K + iK'), \quad u_2 = \int_1^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$$

Es wird:

$$u_1 + u_2 = \sigma$$

$$\frac{\mathcal{P}_{01}(v_1 - b) \mathcal{P}_{10}(v_2 - b)}{\mathcal{P}_{01}(v_1 - b) \mathcal{P}_{10}(v_2 - b)} = e^{-2\tau}$$

wo:

$$\sigma = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t.$$

$$\tau = \tau_0 + k \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} Z(\omega) + \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \sqrt{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_3)}{(\varepsilon - \varepsilon_1) \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}} \right\},$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \log \frac{\mathcal{P}_{01}(v_1^{(0)} + b) \mathcal{P}_{10}(v_2^{(0)} + b)}{\mathcal{P}_{01}(v_1^{(0)} - b) \mathcal{P}_{10}(v_2^{(0)} - b)},$$

$$\text{falls: } v_1^{(0)} = \frac{u_1^{(0)}}{2K}, \quad v_2^{(0)} = \frac{u_2^{(0)}}{2K}.$$

Setzt man $g = e^{\frac{\pi K'}{4K} - i\pi s}$, so werden die acht Functionen φ in diesen Fällen:

$$\varphi_1 = g \left\{ e^{\tau} \mathcal{P}_{10}(s - b) - e^{-\tau} \mathcal{P}_{10}(s + b) \right\}, \quad \varphi_3 = -ig \left\{ e^{\tau} \mathcal{P}_{01}(s - b) - e^{-\tau} \mathcal{P}_{01}(s + b) \right\},$$

$$\varphi_2 = ig \left\{ e^{\tau} \mathcal{P}_{11}(s - b) - e^{-\tau} \mathcal{P}_{11}(s + b) \right\}, \quad \varphi_4 = g \left\{ e^{\tau} \mathcal{P}_{00}(s - b) - e^{-\tau} \mathcal{P}_{00}(s + b) \right\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= g \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b) \right\}, & \varphi_7 &= -ig \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b) \right\}, \\ \varphi_6 &= ig \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{11} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11} (s + b) \right\}, & \varphi &= -g \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b) \right\}. \end{aligned}$$

Was die Formeln 8 bis 11 betrifft, wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{11} \left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K} \right) &= g \cdot \mathfrak{I}_{00} (s) \\ \mathfrak{I}_{01} \left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K} \right) &= -g \cdot \mathfrak{I}_{10} (s) \\ \mathfrak{I}_{00} \left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K} \right) &= ig \cdot \mathfrak{I}_{11} (s) \\ \mathfrak{I}_{10} \left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K} \right) &= -ig \cdot \mathfrak{I}_{01} (s). \end{aligned}$$

Auch im **dritten** und **vierten** Falle können die oben angeführten Formeln nicht unmittelbar verwendet werden. Denn in diesen beiden Fällen ist: $\frac{1}{x^2} < a^2 < \infty$, wir setzen daher:

$$a = \sin \alpha (\omega + iK');$$

$$\text{es ist: } Z(\omega + iK') = -\frac{i\pi}{2K} + \cot \alpha \operatorname{am} \omega \cdot \mathcal{A} \alpha \operatorname{am} \omega + Z(\omega).$$

Die Integralgleichungen lauten hier:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \sigma, \\ \frac{\mathfrak{I}_{10} (v_1 - b) \mathfrak{I}_{10} (v_2 - b)}{\mathfrak{I}_{10} (v_1 + b) \mathfrak{I}_{10} (v_2 + b)} &= e^{-2\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wo:} \quad \sigma &= u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k \sqrt{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \frac{\varepsilon - \nu}{\mu}} \cdot t \\ \tau &= \tau_0 + k \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} Z(\omega) + \frac{\varepsilon - \nu + \varepsilon_2 - \nu}{\mu} \sqrt{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3)}{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}} \right\}. \end{aligned}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{I}_{10} (v_1^{(0)} + b) \mathfrak{I}_{10} (v_2^{(0)} + b)}{\mathfrak{I}_{10} (v_1^{(0)} - b) \mathfrak{I}_{10} (v_2^{(0)} - b)}$$

Die acht Functionen φ nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -ih \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{11} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11} (s + b) \right\}, & \varphi_5 &= -ih \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{11} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11} (s + b) \right\}, \\ \varphi_2 &= h \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b) \right\}, & \varphi_6 &= h \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b) \right\}, \\ \varphi_3 &= h \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b) \right\}, & \varphi_7 &= h \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b) \right\}, \\ \varphi_4 &= -ih \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b) \right\}, & \varphi &= -ih \left\{ e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b) \right\}; \end{aligned}$$

$$\text{wo: } h = e \frac{\pi K'}{4K} - \pi i b.$$

$$\text{Ferner wird: } \mathfrak{D}_{01} \left(b + \frac{iK'}{2K} \right) = i h \mathfrak{D}_{11} (b).$$

Wenden wir uns nun zu der zur Berechnung von α erforderlichen Integration. Es ist:

$$\alpha = \left\{ \frac{h}{k} + \frac{\lambda k \nu}{\mu} (\delta_4 + \delta_5) - \frac{\lambda k}{\mu} \delta_4 \delta_5 \right\} t \\ - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \left\{ \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{x_1^2 dx_1}{R(x_1)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{x_2^2 dx_2}{R(x_2)} \right\}.$$

$$\text{Es wird: } \frac{x^2 dx}{R(x)} = \frac{x^2 dx}{(\varepsilon - x) \Re(x)};$$

$$\frac{x^2}{\varepsilon - x} = \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \varepsilon_3 \right) + (\varepsilon_3 - x) - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x},$$

und daher:

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{x^2 dx}{R(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{x^2 dx}{R(x)} = \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \varepsilon_3 \right) \left\{ \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{dx}{\Re(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{dx}{\Re(x)} \right\} \\ - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon_1} \left\{ \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{(\varepsilon_1 - x) dx}{(\varepsilon - x) \Re(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x} \frac{dx}{\Re(x)} \right\} \\ + \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - x}{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)}} dx + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - x}{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)}} dx.$$

Die beiden ersten Summen von Integralen der rechten Seite sind Vielfache von t . Auf die beiden letzten Integrale wenden wir die Substitution an:

$$x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) z^2, \\ \varepsilon_2 - x = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - z^2), \quad x^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \\ \varepsilon_3 - x = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) (1 - x^2 z^2),$$

dann wird:

$$\frac{1}{2 \sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \int_{x^{(0)}}^x \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - x}{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)}} dx = \int_{z^{(0)}}^z \sqrt{\frac{1 - x^2 z^2}{1 - z^2}} dz = E(u) - E(u^{(0)}),$$

wenn u das elliptische Integral erster Gattung, $E(u)$ das elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet.

Man erhält dann:

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{x^2 dx}{R(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{x^2 dx}{R(x)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu} \left\{ \nu (\varepsilon + \varepsilon_3) - \varepsilon \varepsilon_3 \right\} t \\ + 2 \sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \left\{ E(u_1) + E(u_2) - E(u_1^{(0)}) - E(u_2^{(0)}) \right\}.$$

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung lautet:

$$E(u_1) + E(u_2) = E(u_1 + u_2) + \kappa^2 s(u_1 + u_2) s(u_1) s(u_2)$$

mithin wird:

$$\alpha = \left\{ \frac{h}{k} + \frac{\lambda k \nu}{\mu} (\delta_4 + \delta_5 - \varepsilon - \varepsilon_3) - \frac{\lambda k}{\mu} (\delta_4 \delta_5 - \varepsilon \varepsilon_3) \right\} t \\ - \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ E(\sigma) + \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{01}(b)}{\mathfrak{I}_{00} \mathfrak{I}_{11}(b)} \frac{\mathfrak{I}_{11}(s)}{\mathfrak{I}_{01}(s)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11}(s+b)} \right\} + \text{const.}$$

$$\text{Wo: } \sigma = \sigma_0 + k \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} t$$

$$\sigma_0 = u_1^{(0)} + u_2^{(0)}$$

$$\tau = \tau_0 + k \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} Z(\omega) + \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \sqrt{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_3)}{(\varepsilon - \varepsilon_1) \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}} \right\} t$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{I}_{01}(v_1^{(0)} + b) \mathfrak{I}_{01}(v_2^{(0)} + b)}{\mathfrak{I}_{01}(v_1^{(0)} - b) \mathfrak{I}_{01}(v_2^{(0)} - b)},$$

und const. die Integrationsconstante bedeutet.

In den **beiden ersten** Fällen wird:

$$\alpha = \frac{h}{k} \left\{ + k \gamma \frac{\varepsilon_3 - \delta_4}{\mu} (\delta_3 - \nu) \right\} t \\ - \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ E(\sigma) - \frac{\mathfrak{I}_{00}(s) \mathfrak{I}_{11}(s)}{\mathfrak{I}_{01}(s) \mathfrak{I}_{10}(s)} + \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{01}(b) \mathfrak{I}_{00}(s)}{\mathfrak{I}_{00} \mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{10}(s)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)} \right\} + \text{const.}$$

Wobei die Formel angewendet wurde:

$$E(\sigma + K + iK') = E(\sigma) - \frac{\sin \sigma \cdot \Delta \sin \sigma}{\cos \sigma} + E + i(K' - E'),$$

wo E das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung mod. κ , K' und E' die vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung mod. κ' bedeuten.

Im **dritten** und **vierten** Falle wird:

$$\alpha = \left\{ \frac{h}{k} + \frac{k\lambda}{\mu} (\varepsilon_3 - \delta_5) (\delta_2 - \nu) \right\} t$$

$$- \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ E(\sigma) + \frac{\vartheta_{10} \vartheta_{11}(b) \vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{00} \vartheta_{01}(b) \vartheta_{01}(s)} \frac{e^{\tau} \vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau} \vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau} \vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau} \vartheta_{01}(s+b)} \right\} + \text{const.}$$

Die Constante ist in allen vier Fällen gleich dem Werte der geschweiften Klammer, wenn man in derselben σ durch σ_0 ersetzt. — Schreiten wir nun zur Darstellung der einzelnen Fälle:

Erster Fall: $\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 = \delta_3$.

$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < x_2 < \varepsilon.$$

Dieser Fall tritt ein, falls $n = 0$, $0 < 1 < 1$.

$$\text{Es ist: } \delta_4 = l\delta_2 + m\delta_1 = \delta_1 + 1 (\delta_2 - \delta_1) = \delta_2 - m (\delta_2 - \delta_1) = \frac{\mu}{N} + \nu.$$

$$\text{Man setze: } \delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_4) \xi^2,$$

$$x^2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = 1,$$

$$\delta_4 - x = (\delta_4 - \delta_1) \eta^2,$$

$$a^2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}},$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1) \zeta^2,$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1) \psi^2; \quad x^2 a^2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1}.$$

Dann wird, falls man der Kürze halber schreibt: $i, k = \delta_i \delta_k$.

$$\alpha_1 = \frac{4, 1}{\sqrt{1, 2 \cdot 1, 3}} \xi_1 \xi_2, \quad \alpha_2 = i \frac{1, 2}{\sqrt{2, 3}} \zeta_1 \zeta_2, \quad \alpha_3 = \frac{1, 3}{\sqrt{2, 3}} \psi_1 \psi_2,$$

$$\beta_1 = i \sqrt{\frac{3, 1}{3, 4}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \psi_2^2 - \xi_2 \eta_2 \zeta_1 \psi_1^2 \right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{3, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 \right\},$$

$$\beta_3 = i \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{3, 1}{3, 4}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \right\},$$

$$\gamma_2 = i \sqrt{\frac{3, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 \right\}.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \cdot \alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1} \cdot \alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1} \cdot \alpha_3.$$

$$p = ik \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1} \cdot \frac{3, 1}{3, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 - \xi_2 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$q = k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1} \cdot \frac{3, 1}{3, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \right\},$$

$$r = ik \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1} \cdot \frac{3, 1}{3, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \psi_2^2 \right\}.$$

$$p' = ik \sqrt{\lambda \cdot 2, 1} \frac{3, 1}{\mu} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$q' = \frac{k \sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{\nu - \delta_4}{\sqrt{3, 4}} \cdot 3, 1 \cdot \psi_1 \psi_2, \quad r' = \frac{ik \sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{\nu - \delta_3}{\sqrt{3, 4}} \cdot 4, 1 \cdot \eta_1 \eta_2.$$

$$\beta = i \sqrt{\lambda} \frac{4, 1}{\sqrt{3, 4}} \eta_1 \eta_2, \quad \gamma = \sqrt{\lambda} \frac{3, 1}{\sqrt{3, 4}} \psi_1 \cdot \psi_2.$$

Führt man in diese Ausdrücke Thetafunctionen ein, so wird, wenn:

$$\sigma = \sigma_0 + k \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C B_1 A_1}} \cdot t$$

$$\tau = \tau_0 + k \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C B_1 A_1}} \left\{ \frac{Z(\omega)}{C} + \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)}} \right\} t$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{B} + \frac{m}{A}, \quad \omega = \arg \sin am \sqrt{\frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}}$$

$$\alpha = \frac{k}{A_1} t - \sqrt{C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \left\{ E(\sigma) - \frac{\mathfrak{I}_{11}(s) \mathfrak{I}_{00}(s)}{\mathfrak{I}_{01}(s) \mathfrak{I}_{10}(s)} + \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{01}(b) \mathfrak{I}_{00}(s)}{\mathfrak{I}_{00} \mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{10}(s)} \cdot \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)} \right\} + \text{const.}$$

$$\beta = \sqrt{1C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)},$$

$$\gamma = 2 \sqrt{A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{1}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{\mathfrak{I}_{10}(b) \mathfrak{I}_{00}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{00} (b) \mathfrak{I}_{00} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)};$$

$$\beta_1 = \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$\beta_2 = \frac{\mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{11} (b) \mathfrak{I}_{11} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)};$$

$$\gamma^1 = - \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{10} (b) \mathfrak{I}_{10} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$\gamma^2 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{01} (b) \mathfrak{I}_{01} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$\gamma^3 = \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1} \alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1} \alpha_3.$$

$$p = 2k \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \frac{\mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{00} (b) \mathfrak{I}_{01} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$q = 2k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{00} (b) \mathfrak{I}_{10} (b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)},$$

$$r = 2k \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \frac{\mathfrak{I}_{01} \mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00} (s + b)}.$$

$$p' = 2k \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \sqrt{C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \frac{\mathfrak{P}_{01}}{\mathfrak{P}_{00}^2} \frac{\mathfrak{P}_{10}(b) \mathfrak{P}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{P}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{P}_{00}(s+b)},$$

$$q' = 2k \frac{1}{N} \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{1}{\mathfrak{P}_{10}} \frac{\mathfrak{P}_{10}(b) \mathfrak{P}_{00}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{P}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{P}_{11}(s+b)},$$

$$r' = k \frac{1}{C} \sqrt{\lambda \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{A} \right)} \frac{\mathfrak{P}_{01}}{\mathfrak{P}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{P}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{P}_{11}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{P}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{P}_{00}(s+b)}.$$

Zweiter Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 = \delta_3$$

$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < x_2 < \varepsilon$$

$$n = 0, \quad 1 < l < \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}.$$

$$\delta_4 = \frac{\mu}{N} + \nu = l\delta_2 + m\delta_1.$$

Man setze:

$$\delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_2) \xi^2, \quad x^2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_4 - \delta_1} = \frac{1}{l},$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1) \eta^2, \quad a^2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1},$$

$$\delta_4 - x = (\delta_4 - \delta_1) \zeta^2, \quad x^2 a^2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}.$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1) \psi^2;$$

wo: $0 < \xi_1^2 < 1 < \frac{1}{x^2} = l < \xi_2^2 < \frac{1}{x^2 a^2}.$

Es wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2, 1}{3, 1}} \xi_1 \cdot \xi_2, \quad \alpha_2 = i \sqrt{\frac{2, 1}{3, 2}} \cdot \eta_1 \eta_2, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{3, 1}{3, 2}} \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2;$$

$$\beta_1 = i \sqrt{\frac{4, 1 \cdot 3, 1}{2, 1 \cdot 3, 4}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \psi_1^2 \right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{4, 1 \cdot 3, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4 \cdot 2, 1}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 \right\},$$

$$\beta_3 = i \sqrt{\frac{4, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \right\};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{4, 1 \cdot 3, 1}{2, 1 \cdot 3, 4} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \right\},$$

$$\gamma_2 = i \sqrt{\frac{4, 1 \cdot 3, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4 \cdot 2, 1} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{4, 1 \cdot 3, 1}{3, 2 \cdot 3, 4} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 \right\}.$$

$$p = ik \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1} \frac{4, 1 \cdot 3, 1}{2, 1 \cdot 3, 2} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_1 - \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$q = k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1} \frac{4, 1 \cdot 3, 1}{2, 1 \cdot 3, 2} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \right\},$$

$$r = ik \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1} \frac{4, 1 \cdot 3, 1}{2, 1 \cdot 3, 2} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \psi_2^2 \right\}.$$

$$p' = ik \sqrt{\lambda \cdot 4, 1} \frac{3, 1}{\mu} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$q' = \frac{k \sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{\nu - \delta_4}{\sqrt{3, 4}} 3, 1 \cdot \psi_1 \psi_2, \quad r' = \frac{ik \sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{\nu - \delta_3}{\sqrt{3, 4}} 4, 1 \cdot \zeta_1 \zeta_2.$$

$$\beta = i \sqrt{\lambda} \frac{4, 1}{\sqrt{3, 4}} \zeta_1 \zeta_2, \quad \gamma = \sqrt{\lambda} \frac{3, 1}{\sqrt{3, 4}} \psi_1 \psi_2.$$

$$\text{Es ist: } \sigma = \sigma_0 + k \sqrt{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \cdot t,$$

$$\tau = \tau_0 + k \sqrt{1C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \left\{ \frac{Z(\omega)}{C} + \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{A} \right)}} \right\} t;$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{B} + \frac{m}{A}, \quad \omega = \arg \sin am \sqrt{\frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{N}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Es wird: } \alpha = & \frac{h}{k} t - \sqrt{1C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \left\{ E(\sigma) - \frac{\mathfrak{I}_{11}(s) \mathfrak{I}_{00}(s)}{\mathfrak{I}_{01}(s) \mathfrak{I}_{10}(s)} \right. \\ & + \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{01}(b) \mathfrak{I}_{00}(s)}{\mathfrak{I}_{00} \mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{10}(s)} \cdot \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)} \left. \right\} + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\beta = \sqrt{1C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{\mathcal{J}_{01}}{\mathcal{J}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathcal{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathcal{J}_{01} (s + b)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)}};$$

$$\gamma = 2 \sqrt{A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\mathcal{J}_{01} \mathcal{J}_{10}^2 (b)}{\mathcal{J}_{10}^2 \mathcal{J}_{01} (b)} \frac{\mathcal{J}_{00} (s)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)}}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{J}_{00}}{\mathcal{J}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathcal{J}_{10} (s - b) - e^{-\tau} \mathcal{J}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{\mathcal{J}_{01}}{\mathcal{J}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathcal{J}_{11} (s - b) - e^{-\tau} \mathcal{J}_{11} (s + b)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{\mathcal{J}_{10}} \frac{\mathcal{J}_{10} (b) \mathcal{J}_{00} (s)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)};$$

$$\beta_1 = \frac{\mathcal{J}_{01}}{\mathcal{J}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathcal{J}_{11} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{11} (s + b)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$\beta_2 = -\frac{\mathcal{J}_{00}}{\mathcal{J}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathcal{J}_{10} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\mathcal{J}_{10}} \frac{\mathcal{J}_{11} (b) \mathcal{J}_{01} (s)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)};$$

$$\gamma^1 = \frac{2}{\mathcal{J}_{10}} \frac{\mathcal{J}_{00} (b) \mathcal{J}_{10} (s)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$\gamma^2 = \frac{2}{\mathcal{J}_{10}} \frac{\mathcal{J}_{01} (b) \mathcal{J}_{11} (s)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$\gamma^3 = \frac{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) - e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1} \alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1} \alpha_3.$$

$$p = 2k \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{AB_1 C_1} \cdot \frac{-m}{1}} \frac{1}{\mathcal{J}_{00}} \frac{\mathcal{J}_{10} (b) \mathcal{J}_{11} (s)}{e^{\tau} \mathcal{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathcal{J}_{00} (s + b)},$$

$$q = 2k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1} \cdot \frac{-m}{1}} \frac{1}{\mathfrak{I}_{01}} \frac{\mathfrak{I}_{10}(b) \mathfrak{I}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)},$$

$$r = k \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1} \cdot \frac{-m}{1}} \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)},$$

$$p' = 2k \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \sqrt{\lambda \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{B} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{10}(b) \mathfrak{I}_{00}(b)}{\mathfrak{I}_{10} \cdot \mathfrak{I}_{01}(b)} \frac{\mathfrak{I}_{01}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)},$$

$$q' = 2k \frac{1}{N} \sqrt{A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{01}(b)}{\mathfrak{I}_{01}} \frac{\mathfrak{I}_{00}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)},$$

$$r' = k \frac{1}{C} \sqrt{\lambda \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{A} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)}.$$

Dritter Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3.$$

$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon < x_2 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

$$\frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}} < 1 < 1, \quad m = 0, \quad 0 = n < \frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}$$

$$\delta_5 = \frac{\mu}{M} + \nu = n\delta_1 + l\delta_3.$$

$$\text{Man setze: } \delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_5) \xi^2,$$

$$\kappa^2 = \frac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = 1,$$

$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_1) \eta^2,$$

$$a^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}},$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1) \zeta^2,$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1) \psi^2; \quad a = \sinam(\omega + iK').$$

$$0 < \xi_1^2 < \frac{1}{\kappa^2 a^2} < \xi_2^2 < 1 < \frac{1}{\kappa^2}.$$

Dann wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{5, 1}{2, 1 \cdot 3, 1}} \xi_1 \xi_2, \quad \alpha_2 = i \sqrt{\frac{2, 1}{3, 2}} \psi_1 \psi_2, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{3, 1}{3, 2}} \zeta_1 \zeta_2;$$

$$\beta_1 = i \sqrt{\frac{2, 1}{5, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 3, 1}{5, 2 \cdot 3, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 \right\},$$

$$\beta_3 = i \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 2, 1}{5, 2 \cdot 3, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2, 1}{5, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \psi_2^2 - \xi_2 \eta_2 \zeta_1 \psi_1^2 \right\},$$

$$\gamma_2 = i \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 3, 1}{5, 2 \cdot 3, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 2, 1}{5, 2 \cdot 3, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 \right\}.$$

$$p = ik \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \cdot \frac{2, 1}{3, 2} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 - \xi_2 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$q = k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \cdot \frac{2, 1}{3, 2} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \psi_2^2 \right\}.$$

$$r = ik \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \cdot \frac{2, 1}{3, 2} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \right\},$$

$$p' = ik \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot 2, 1 \cdot \sqrt{\frac{3, 1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \right\},$$

$$q' = \frac{k \sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot 5, 1 \cdot \frac{\nu - \delta_2}{\sqrt{5, 2}} \eta_1 \eta_2, \quad r' = \frac{ik \sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot 2, 1 \cdot \frac{\nu - \delta_5}{\sqrt{5, 2}} \psi_1 \psi_2,$$

$$\beta = i \sqrt{\frac{\lambda}{5, 2}} \cdot 2, 1 \cdot \psi_1 \psi_2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\lambda}{5, 2}} \cdot 5, 1 \eta_1 \eta_2.$$

$$\text{Bedeutet: } \sigma = \sigma_0 + k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \cdot t,$$

$$\tau = \tau_0 + k \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \left\{ \frac{Z(\omega)}{B} + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{M} \right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right)}{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)}} \right\} t;$$

$$\omega = -iK' + \arg \sin \operatorname{am} \sqrt{\frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}},$$

$$\text{so wird: } \alpha = \frac{k}{A_1} t - \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \left\{ E(\sigma) + \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{11}(s)}{\mathfrak{I}_{00} \mathfrak{I}_{01}(b) \mathfrak{I}_{01}(s)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)} \right\} + \text{const.}$$

$$\beta = 2 \sqrt{A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{1}{\mathfrak{I}_{01}} \frac{\mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)};$$

$$\gamma = \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{10}(b) \mathfrak{I}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)};$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{00}(b) \mathfrak{I}_{01}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\beta_2 = \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{10}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)};$$

$$\gamma_1 = \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\gamma^2 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{11} (b) \mathfrak{I}_{00} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)},$$

$$\gamma^3 = \frac{\mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}} \frac{\mathfrak{I}_{11} (s - b) - \mathfrak{I}_{11} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1} \alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1} \alpha_3.$$

$$p = 2k \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{AB_1 C_1}} \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{10} (b) \mathfrak{I}_{10} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)},$$

$$q = k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{BC_1 A_1}} \frac{\mathfrak{I}_{01} \mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)},$$

$$r = 2k \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{CA_1 B_1}} \frac{\mathfrak{I}_{10}}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{10} (b) \mathfrak{I}_{01} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)}.$$

$$p' = 2k \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sqrt{n B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{10} (b) \mathfrak{I}_{00} (b)}{\mathfrak{I}_{00}} \cdot \frac{\mathfrak{I}_{10} (s)}{\mathfrak{I}_{11} (b) e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)},$$

$$q' = k \sqrt{\frac{1}{B} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)},$$

$$r' = 2k \left(\frac{n}{A} + \frac{1}{C} \right) \sqrt{A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{11} (b)}{\mathfrak{I}_{01}} \frac{\mathfrak{I}_{11} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01} (s + b)}.$$

Vierter Fall. $\delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$

$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon < x_2 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

$$1 < l < \infty, \quad m = 0, \quad -\infty < n < 0.$$

$$\delta_5 = n\delta_1 + l\delta_3, \quad \frac{1}{M} = \frac{n}{A} + \frac{l}{C}.$$

Man setze:

$$\delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_3) \xi^2, \quad x^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_5 - \delta_1} = \frac{1}{l},$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1) \eta^2, \quad a^2 = \frac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = l \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}},$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1) \psi^2; \quad x^2 a^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Dann wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3, 1}{3, 2}} \xi_1 \xi_2, \quad \alpha_2 = i \sqrt{\frac{2, 1}{3, 2}} \psi_1 \psi_2, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{3, 1}{3, 2}} \eta_1 \eta_2;$$

$$\beta_1 = i \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 5, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 2 \cdot 5, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 \right\},$$

$$\beta_3 = i \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \right\};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 5, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \psi_1^2 \right\},$$

$$\gamma_2 = i \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 2 \cdot 5, 2}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{2, 1 \cdot 2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2}} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 \psi_2^2 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \psi_1^2 \right\};$$

$$p = ik \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 3, 2} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_1 \eta_2 \zeta_1 - \xi_2 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$q = k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 3, 2} \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 \psi_1^2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \psi_2^2 \right\},$$

$$r = ik \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \frac{2, 1 \cdot 5, 1}{3, 1 \cdot 3, 2} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_1 \zeta_1 - \xi_1 \eta_2 \zeta_2 \right\};$$

$$p' = ik \sqrt{\lambda \cdot 5, 1} \frac{2, 1}{\mu} \frac{\psi_1 \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left\{ \xi_2 \eta_2 \zeta_1 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 \right\},$$

$$q' = k \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{\nu - \delta_2}{\sqrt{5, 2}} 5, 1 \cdot \zeta_1 \zeta_2, \quad r' = ik \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \frac{\nu - \delta_5}{\sqrt{5, 2}} 2, 1 \cdot \psi_1 \psi_2.$$

$$\beta = i \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{5, 2}} 2, 1 \cdot \psi_1 \psi_2, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{5, 2}} 5, 1 \cdot \zeta_1 \zeta_2.$$

Es wird ferner:

$$\sigma = \sigma_0 + k \sqrt{\frac{1}{B} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot t,$$

$$\tau = \tau_0 + k \sqrt{\text{LB} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \left\{ \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{M} \right)}{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{A} \right)}} + \frac{Z(\omega)}{B} \right\} t;$$

$$\omega = -iK' + \arg \sin \text{am} \sqrt{\frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}} . 1$$

$$\text{und mithin: } \alpha = \frac{h}{k} t - \sqrt{\text{LB} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \left\{ E(\sigma) \right.$$

$$+ \frac{\mathfrak{I}_{10} \mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{11}(s)}{\mathfrak{I}_{00} \mathfrak{I}_{01}(b) \mathfrak{I}_{01}(s)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)} \Big\} + \text{const.}$$

$$\beta = 2 \sqrt{A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{I}_{11}(b)}{\mathfrak{I}_{01}(b)} \frac{\mathfrak{I}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)};$$

$$\gamma = \sqrt{\text{LB} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{00}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{00}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{I}_{00}}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{11}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{11}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{\mathfrak{I}_{00}(b) \mathfrak{I}_{11}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{\mathfrak{I}_{01}}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)};$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{\mathfrak{I}_{10}(b) \mathfrak{I}_{01}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{10}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{10}(s+b)},$$

$$\beta_2 = \frac{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) + e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\mathfrak{I}_{10}} \frac{\mathfrak{I}_{11}(b) \mathfrak{I}_{00}(s)}{e^{\tau} \mathfrak{I}_{01}(s-b) - e^{-\tau} \mathfrak{I}_{01}(s+b)};$$

$$\gamma^1 = \frac{\mathfrak{J}_{01}}{\mathfrak{J}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{10} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{10} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$\gamma^2 = \frac{-2}{\mathfrak{J}_{10}} \frac{\mathfrak{J}_{01} (b) \mathfrak{J}_{10} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$\gamma^3 = \frac{\mathfrak{J}_{00}}{\mathfrak{J}_{10}} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{11} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{11} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$u = \frac{k}{A_1} \alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1} \alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1} \alpha_3,$$

$$p = 2k \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \frac{\mathfrak{J}_{01}}{\mathfrak{J}_{10}^2} \frac{\mathfrak{J}_{00} (b) \mathfrak{J}_{00} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$q = k \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \frac{\mathfrak{J}_{01} \mathfrak{J}_{00}}{\mathfrak{J}_{10}^2} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{00} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$r = 2k \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \frac{\mathfrak{J}_{00}}{\mathfrak{J}_{10}^2} \frac{\mathfrak{J}_{00} (b) \mathfrak{J}_{01} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$p' = k \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \sqrt{B} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\mathfrak{J}_{01}^2 \mathfrak{J}_{10} (b)}{\mathfrak{J}_{10}^2 \mathfrak{J}_{11} (b)} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{00} (s - b) + e^{-\tau} \mathfrak{J}_{00} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$q' = k \sqrt{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \frac{\mathfrak{J}_{00}^2}{\mathfrak{J}_{10}^2} \frac{e^{\tau} \mathfrak{J}_{00} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{00} (s + b)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)},$$

$$r' = 2k \left(\frac{n}{A} + \frac{1}{C} \right) \sqrt{C} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{\mathfrak{J}_{10} (b)}{\mathfrak{J}_{00}} \frac{\mathfrak{J}_{11} (s)}{e^{\tau} \mathfrak{J}_{01} (s - b) - e^{-\tau} \mathfrak{J}_{01} (s + b)}.$$

In den fünf übrigen Fällen geht je eine der beiden Hilfsveränderlichen in eine Constante über. Da sich hierdurch die allgemeinen Formeln wesentlich vereinfachen, so mögen diese Fälle zunächst gemeinschaftlich behandelt werden.

Wird eine der Veränderlichen gleich ε , so lautet die Differentialgleichung der anderen:

$$\frac{dx}{\Re(x)} = 2k \sqrt{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot dt,$$

$$\text{wo: } \Re(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)}, \quad \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

Das Integral derselben wird:

$$\int_{\varepsilon_1}^x \frac{dx}{\Re(x)} = 2k \sqrt{\lambda} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t,$$

falls man als Nullpunkt der Zeit einen derjenigen Zeitpunkte wählt, für welchen $x = \varepsilon_1$ ist.

$$\text{Setzt man: } x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) z^2, \quad \kappa^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}.$$

so wird:

$$\int_{\varepsilon_1}^x \frac{dx}{\Re(x)} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}},$$

$$\text{und falls } \tau = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)}}, \quad z = \sin \operatorname{am} \tau,$$

so lautet das Integral:

$$\tau = k \sqrt{\lambda (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t.$$

Es wird:

$$\begin{aligned} x - \varepsilon_1 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin^2 \operatorname{am} \tau \\ \varepsilon_2 - x &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos^2 \operatorname{am} \tau \quad (\text{mod. } \kappa). \\ \varepsilon_3 - x &= (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \mathcal{A}^2 \operatorname{am} \tau. \end{aligned}$$

5. Fall:

$$\begin{aligned} \delta_1 = x_1 = \delta_4 &< \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3 \\ \varepsilon &< \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \\ l = 0 \quad m < 1 \quad n < 1 \quad m + n &= 1 \\ m &= \frac{\delta_5 - \delta_2}{\delta_3 - \delta_2} \quad n = \frac{\delta_3 - \delta_5}{\delta_3 - \delta_2} \end{aligned}$$

$$x - \delta_2 = (\delta_5 - \delta_2) \sin^2 \operatorname{am} \tau \quad \tau = k \frac{\delta_1 - \nu}{\mu} \sqrt{\lambda (\delta_3 - \delta_2)} \cdot t$$

$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_2) \cos^2 \operatorname{am} \tau = k \sqrt{\frac{1}{A} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot t$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_2) \mathcal{A}^2 \operatorname{am} \tau \quad \kappa^2 = m.$$

Führt man diese elliptische Functionen in die oben angeführten Formeln ein, so findet man Folgendes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & \alpha_2 &= \sqrt{m} \sin \operatorname{am} \tau & \alpha_3 &= \mathcal{A} \operatorname{am} \tau \\ \beta_1 &= -1 & \beta_2 &= 0 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 & \gamma_2 &= -\mathcal{A} \operatorname{am} \tau & \gamma_3 &= \sqrt{m} \sin \operatorname{am} \tau. \end{aligned}$$

$$D\alpha = k \left(\frac{m}{B_1} \sin^2 \text{am } \tau + \frac{1}{C_1} \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \right) = k \left\{ \frac{1}{B_1} - \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \right\}$$

$$\alpha = \frac{k}{B_1} t - \sqrt{\frac{A}{B_1} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} E(\tau).$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{m A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot \cos \text{am } \tau.$$

$$u = 0, \quad v = \frac{k}{B_1} \sqrt{m} \sin \text{am } \tau, \quad w = \frac{k}{C_1} \mathcal{A} \text{am } \tau.$$

$$p = -k \sqrt{\frac{m}{A} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot \cos \text{am } \tau, \quad q = 0, \quad r = 0.$$

6. Fall.

$$\begin{aligned} \delta_1 = x_1 = \delta_4 &< \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5 \\ \varepsilon &< \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \\ l = 0 \quad m > 1 \quad n < 0 \quad m + n &= 1. \\ m = \frac{\delta_5 - \delta_2}{\delta_3 - \delta_2} \quad n = \frac{\delta_3 - \delta_5}{\delta_3 - \delta_2} \end{aligned}$$

Man setzt:

$$\begin{aligned} x - \delta_2 &= (\delta_3 - \delta_2) \sin^2 \text{am } \tau & x &= k \sqrt{\frac{m}{A} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot t. \\ \delta_3 - x &= (\delta_3 - \delta_2) \cos^2 \text{am } \tau \\ \delta_5 - x &= (\delta_5 - \delta_2) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau & x^2 &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Es wird:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & \alpha_2 &= \sin \text{am } \tau & \alpha_3 &= \cos \text{am } \tau \\ \beta_1 &= 1 & \beta_2 &= 0 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 & \gamma_2 &= \cos \text{am } \tau & \gamma_3 &= -\sin \text{am } \tau. \end{aligned}$$

$$D\alpha = k \left\{ \frac{\sin^2 \text{am } \tau}{B_1} + \frac{\cos^2 \text{am } \tau}{C_1} \right\} = k \left\{ \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} - m \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \right\}$$

$$\alpha = k \left(\frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} \right) \cdot t - \sqrt{m A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} E(\tau).$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{m A \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \mathcal{A} \text{am } \tau.$$

$$u = 0, \quad v = \frac{k}{B_1} \sin \text{am } \tau, \quad w = \frac{k}{C_1} \cos \text{am } \tau;$$

$$p = k \sqrt{\frac{m}{A} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot \mathcal{A} \text{am } \tau, \quad q = 0, \quad r = 0.$$

7. Fall.

$$\begin{aligned} \delta_1 &< x_1 < \delta_4 < \delta_2 = x_2 = \delta_5 < \delta_3 \\ \varepsilon_1 &< x < \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3. \\ l &< 1, \quad m = 0, \quad n < 1, \quad l + m &= 1. \end{aligned}$$

$$l = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} \quad n = \frac{\delta_3 - \delta_4}{\delta_3 - \delta_1}.$$

Man setze:

$$x - \delta_1 = (\delta_4 - \delta_1) \sin^2 \text{am } \tau \quad \tau = k \frac{\delta_2 - \nu}{\mu} \sqrt{\lambda (\delta_3 - \delta_1)} \cdot t$$

$$\delta_4 - x = (\delta_4 - \delta_1) \cos^2 \text{am } \tau = k \sqrt{\frac{1}{B} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot t$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \quad x^2 = 1.$$

Es wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{1} \cdot \sin \text{am } \tau \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = \mathcal{A} \text{am } \tau$$

$$\beta_1 = -\mathcal{A} \text{am } \tau \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_3 = \sqrt{1} \cdot \sin \text{am } \tau$$

$$\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = -1 \quad \gamma_3 = 0.$$

$$D\alpha = k \left\{ \frac{1}{A_1} \sin^2 \text{am } \tau + \frac{1}{C_1} \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \right\} = k \left\{ \frac{1}{A_1} - \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \right\}$$

$$\alpha = \frac{k}{A_1} t - \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} E(\tau)$$

$$\beta = \sqrt{1B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot \cos \text{am } \tau, \quad \gamma = 0.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \sqrt{1} \sin \text{am } \tau, \quad v = 0, \quad w = \frac{k}{C_1} \mathcal{A} \text{am } \tau;$$

$$p = 0, \quad q = k \sqrt{\frac{1}{B} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} \cdot \cos \text{am } \tau, \quad r = 0.$$

8. Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_3 < \delta_5$$

$$\varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3.$$

$$l > 1 \quad m < 0 \quad n = 0 \quad l + m = 1.$$

$$l = \frac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \quad m = \frac{\delta_2 - \delta_5}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Man setzt:

$$x - \delta_1 = (\delta_2 - \delta_1) \sin^2 \text{am } \tau \quad \tau = k \sqrt{\lambda (\delta_5 - \delta_1)} \frac{\delta_3 - \nu}{\mu} t$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1) \cos^2 \text{am } \tau = k \sqrt{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \cdot t$$

$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_1) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \quad x^2 = \frac{1}{1}.$$

Es wird:

$$\alpha_1 = \sin \text{am } \tau \quad \alpha_2 = \cos \text{am } \tau \quad \alpha_3 = 0$$

$$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_3 = 1$$

$$\gamma_1 = \cos \text{am } \tau \quad \gamma_2 = -\sin \text{am } \tau \quad \gamma_3 = 0.$$

$$D\alpha = k \left\{ \frac{\sin^2 \text{am } \tau}{A_1} + \frac{\cos^2 \text{am } \tau}{B_1} \right\} = k \left\{ \frac{1}{A_1} + \frac{m}{B_1} - 1 \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \mathcal{A}^2 \text{am } \tau \right\}$$

$$\alpha = k \left(\frac{1}{A_1} + \frac{m}{B_1} \right) \cdot t - \sqrt{1C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} E(\tau)$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{1C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \cdot \mathcal{A} \text{am } \tau.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \sin \text{am } \tau, \quad v = \frac{k}{B_1} \cos \text{am } \tau, \quad w = 0.$$

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = k \sqrt{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} \mathcal{A} \text{am } \tau.$$

In den Fällen 5 bis 8 bleibt eine Hauptaxe in unveränderlicher Richtung. Diese vier Fälle sind von denjenigen nicht wesentlich verschieden, welche Thomson und Tait beschrieben haben.

9. Fall.

$$\begin{aligned} \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_5 < \delta_3 \\ \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Alle bisher betrachteten Fälle zeichneten sich dadurch aus, dass eine der Constanten l, m, n verschwand. In diesem Falle verschwindet keine derselben, aber es besteht, abgesehen von der Beziehung

$$l + m + n = 1$$

eine zweite Gleichung zwischen diesen Grössen, diejenige nämlich, welche besagt, dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{\delta - \delta_1} + \frac{m}{\delta - \delta_2} + \frac{n}{\delta - \delta_3} = 0$$

einander gleich sind.

Diese zweite Beziehung lautet:

$$\left\{ l(\delta_2 + \delta_3) + m(\delta_3 + \delta_1) + n(\delta_1 + \delta_2) \right\}^2 = 4 \left\{ l\delta_2\delta_3 + m\delta_3\delta_1 + n\delta_1\delta_2 \right\}$$

und wenn man die Constanten des Körpers einführt:

$$\left\{ lA(B+C) + mB(C+A) + nC(A+B) \right\}^2 = 4ABC \left\{ lA + mB + nC \right\},$$

oder auch:

$$\sqrt{1 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right)} - \sqrt{m \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)} - \sqrt{n \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)} = 0.$$

$$\text{Es wird: } \delta_4 = \frac{m+n}{2} \delta_1 + \frac{n+1}{2} \delta_2 + \frac{1+m}{2} \delta_3 = \frac{\mu}{N} + \nu,$$

$$\text{falls: } \frac{1}{N} = \frac{m+n}{2} \frac{1}{A} + \frac{n+1}{2} \frac{1}{B} + \frac{1+m}{2} \frac{1}{C}.$$

Setzt man: $x - \delta_1 = (\delta_2 - \delta_1) z^2$, $z = \sin \text{am } \tau$,

$$\tau = \frac{k}{N} \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} t, \quad \varrho = \frac{\tau}{2K},$$

$$\kappa^2 = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}, \quad \kappa'^2 = \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}, \quad \text{so wird:}$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{1} \frac{\mathfrak{P}_{11}(\varrho)}{\mathfrak{P}_{01}(\varrho)} \quad \alpha_2 = \sqrt[4]{-m} \frac{\mathfrak{P}_{10}(\varrho)}{\mathfrak{P}_{01}(\varrho)} \quad \alpha_3 = \sqrt[4]{n} \frac{\mathfrak{P}_{00}(\varrho)}{\mathfrak{P}_{01}(\varrho)}.$$

Man findet: $\alpha = \frac{k}{\kappa} \left\{ \frac{\sqrt{1}}{A_1} - \frac{\kappa' \sqrt{-m}}{B_1} \right\} t - \frac{1}{\mu^2} \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)} E(\tau).$

$$u = \frac{k}{A_1} \alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1} \alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1} \alpha_3.$$

Es wird:

$$p = k \sqrt[4]{-m n} \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \frac{\mathfrak{P}_{11}(\varrho)}{\mathfrak{P}_{01}(\varrho)}, \quad q = k \sqrt[4]{n l} \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \frac{\mathfrak{P}_{10}(\varrho)}{\mathfrak{P}_{01}(\varrho)},$$

$$r = k \sqrt[4]{-l m} \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \frac{\mathfrak{P}_{00}(\varrho)}{\mathfrak{P}_{01}(\varrho)}, \quad p' = \frac{k}{\mu} \sqrt{\lambda \Delta} \cdot \sqrt[4]{-l m n}.$$

Zur Berechnung der übrigen Grössen q' , r' u. s. w. sind die oben angeführten Formeln unbrauchbar. Dieselben müssen daher in ähnlicher Weise ermittelt werden, wie es im allgemeinen Falle auf Seite 10 geschehen ist.

Es ist:

$$p^2 = \frac{k^2}{A^2} \frac{\lambda}{\Delta} \cdot 3, 2 \cdot 2, 4 \cdot 3, 4 \cdot 1, x, \quad q^2 = \frac{k^2}{B^2} \frac{\lambda}{\Delta} \cdot 1, 3 \cdot 3, 4 \cdot 1, 4 \cdot 2, x,$$

$$r^2 = \frac{k^2}{C^2} \frac{\lambda}{\Delta} \cdot 2, 1 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, x.$$

Es ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{k^2}{\mu^2} \lambda \Delta \sqrt{-l m n} + \frac{k^2 \lambda}{N^2} (\delta_4 - x),$$

so dass:

$$p^2 + q^2 + r^2 - p'^2 = q'^2 + r'^2 = \frac{k^2 \lambda}{N^2} (\delta_4 - x).$$

Differentirt man α_1 , α_2 , α_3 , p , q , r nach der Zeit t , so wird nach mehreren Umformungen:

$$D\alpha_1 \cdot Dp + D\alpha_2 \cdot Dq + D\alpha_3 \cdot Dr = \frac{k^3 \sqrt{\Delta^3}}{\mu N^2} \sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-l m n} (x - v),$$

$$\frac{D\alpha_1 \cdot Dp + D\alpha_2 \cdot Dq + D\alpha_3 \cdot Dr}{q'^2 + r'^2} = \frac{k}{\mu} \sqrt{\lambda \Delta} \sqrt[4]{-l m n} \frac{x - v}{\delta_4 - x}.$$

$$D \operatorname{arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{k}{\mu} \sqrt{\lambda \Delta} \sqrt[4]{-l m n} \frac{x - \nu}{\delta_4 - x},$$

$$d \operatorname{arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda}}{\delta_4 - \nu} \sqrt[4]{-l m n} \frac{x - \nu}{\delta_4 - x} \cdot \frac{dx}{\Re(x)}.$$

$$\text{Es ist: } \frac{x - \nu}{\delta_4 - x} = \frac{\delta_1 - \nu}{\delta_4 - \delta_1} + \frac{\delta_4 - \nu}{\delta_4 - \delta_1} \cdot \frac{x^2 a^2 z^2}{1 - x^2 a^2 z^2}, \text{ wo: } a^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_4 - \delta_1},$$

$$\text{und: } \frac{dx}{\Re(x)} = \frac{2}{\sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}}.$$

Mithin wird:

$$d \operatorname{arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-l m n}}{(\delta_4 - \delta_1) \sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \left\{ \frac{\delta_1 - \nu}{\delta_4 - \nu} + \frac{x^2 a^2 z^2}{1 - x^2 a^2 z^2} \right\} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}},$$

$$\text{da nun: } \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-l m n}}{(\delta_4 - \delta_1) \sqrt{\delta_3 - \delta_1}} = i \frac{\sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - x^2 a^2}}{a},$$

so hat man:

$$\begin{aligned} d \operatorname{arc tang} \frac{q'}{r'} &= \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-l m n}}{(\delta_4 - \delta_1) \sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \cdot \frac{N}{A} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}} \\ &+ \frac{x^2 i a \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-x^2 a^2} z^2 dz}{(1-x^2 a^2 z^2) \sqrt{(1-z^2)(1-x^2 z^2)}}. \end{aligned}$$

Man setze: $a = \sin \operatorname{am} (iv + K, x)$, da: $1 < a^2 < \frac{1}{x^2}$.

Durch Integration ergibt sich dann:

$$\operatorname{arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-l m n}}{(\delta_4 - \delta_1) \sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \cdot \frac{N}{A} \cdot \tau + i \Pi(\tau, iv + K, x).$$

Es tritt keine Integrationsconstante hinzu, falls man über die Richtung der η Axe so verfügt, dass zur Zeit $t = 0$ keine Rotation um diese Axe stattfindet. Es kann und soll in dieser Weise über die η Axe verfügt werden.

Zwischen dieser zweiten Classe der elliptischen Transcendenten dritter Gattung, der Zetafunction und der Thetafunction besteht die Beziehung:

$$i \Pi (\tau, i v + K) = \tau \cdot i Z (i v + K) + \frac{i}{2} \log \frac{\vartheta_{00} (\varrho - i \omega)}{\vartheta_{00} (\varrho + i \omega)},$$

falls $\omega = \frac{v}{2K}$; man setze ferner:

$$\vartheta_{00} (\varrho + i \omega) = f + i g, \quad f = \frac{1}{2} \left\{ \vartheta_{00} (\varrho + i \omega) + \vartheta_{00} (\varrho - i \omega) \right\},$$

$$\vartheta_{00} (\varrho - i \omega) = f - i g, \quad g = \frac{1}{2i} \left\{ \vartheta_{00} (\varrho + i \omega) - \vartheta_{00} (\varrho - i \omega) \right\}.$$

Dann wird:

$$\frac{i}{2} \log \frac{\vartheta_{00} (\varrho - i \omega)}{\vartheta_{00} (\varrho + i \omega)} = \frac{i}{2} \log \frac{f - i g}{f + i g} = \text{arc tang } \frac{g}{f},$$

und:

$$\text{arc tang } \frac{q'}{r'} = \sigma + \text{arc tang } \frac{g}{f},$$

$$\text{wenn: } \tau = \left\{ \frac{N}{A} \cdot \frac{\sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{-1mn}}{4, 1 \cdot \sqrt{3}, 1} + i Z (i v + K) \right\} t.$$

$$\text{Es wird: } \frac{q'}{r'} = \text{tang} \left(\sigma + \text{arc tang } \frac{g}{f} \right) = \frac{f \text{ tang } \sigma + g}{f - g \text{ tang } \sigma},$$

$$q' = (f \sin \sigma + g \cos \sigma) \sqrt{\frac{q'^2 + r'^2}{f^2 + g^2}}, \quad r' = (f \cos \sigma - g \sin \sigma) \sqrt{\frac{q'^2 + r'^2}{f^2 + g^2}}.$$

Nun ist: $q'^2 + r'^2 = G^2 \cdot (1 - x^2 a^2 \sin^2 \text{am } \tau)$,

$$G^2 = \frac{k^2}{N^2} \sqrt{1BC \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)}$$

$$f^2 + g^2 = \vartheta_{00} (\varrho + i \omega) \cdot \vartheta_{00} (\varrho - i \omega).$$

Unter Anwendung einer Formel die Jacobi im Art. 54 seiner Fundamente nova gibt, wird:

$$\frac{1 - x^2 a^2 \sin^2 \text{am } \tau}{\vartheta_{00} (\varrho + i \omega) \vartheta_{00} (\varrho - i \omega)} = \frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{00} (\varrho + i \omega) \vartheta_{01} (\varrho)}.$$

Mithin ist endlich:

$$q' = G \cdot \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00} (\varrho - i \omega) \vartheta_{01} (\varrho)} (f \sin \sigma + g \cos \sigma),$$

$$r' = G \cdot \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00} (\varrho - i \omega) \vartheta_{01} (\varrho)} (f \cos \sigma - g \sin \sigma),$$

$$\text{wo: } G = \frac{k}{N} \sqrt{1BC \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)}$$

Zur Berechnung der Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ dienen die Gleichungen auf Seite 10.

Unter Berücksichtigung der Gruppe 7 auf Seite 5 erhält man durch Auflösen jener:

$$\begin{aligned} \beta_1 (q'^2 + r'^2) &= r' D\alpha_1 + q' (\alpha_2 D\alpha_3 - \alpha_3 D\alpha_2), & \gamma_1 (q'^2 + r'^2) &= -q' D\alpha_1 + r' (\alpha_2 D\alpha_3 - \alpha_3 D\alpha_2), \\ \beta_2 (q'^2 + r'^2) &= r' D\alpha_2 + q' (\alpha_3 D\alpha_1 - \alpha_1 D\alpha_3), & \gamma_2 (q'^2 + r'^2) &= -q' D\alpha_2 + r' (\alpha_3 D\alpha_1 - \alpha_1 D\alpha_3), \\ \beta_3 (q'^2 + r'^2) &= r' D\alpha_3 + q' (\alpha_1 D\alpha_2 - \alpha_2 D\alpha_1), & \gamma_3 (q'^2 + r'^2) &= -q' D\alpha_3 + r' (\alpha_1 D\alpha_2 - \alpha_2 D\alpha_1). \end{aligned}$$

Setzt man: $H = \frac{k}{N} \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)}$, so wird:

$$D\alpha_1 = H \sqrt[4]{1} \frac{\mathfrak{I}_{01}^2}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q)}{\mathfrak{I}_{01}^2(q)}, \quad \alpha_2 \cdot D\alpha_3 - \alpha_3 \cdot D\alpha_2 = H \sqrt[4]{-mn} \frac{\mathfrak{I}_{01}^2}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{11}(q)}{\mathfrak{I}_{01}(q)}$$

$$D\alpha_2 = -H \sqrt[4]{-m} \frac{\mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q)}{\mathfrak{I}_{01}^2(q)}, \quad \alpha_3 \cdot D\alpha_1 - \alpha_1 \cdot D\alpha_3 = H \sqrt[4]{nl} \frac{\mathfrak{I}_{10}(q)}{\mathfrak{I}_{01}(q)}$$

$$D\alpha_3 = -H \sqrt[4]{n} \frac{\mathfrak{I}_{10}^2}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q)}{\mathfrak{I}_{01}^2(q)}, \quad \alpha_1 \cdot D\alpha_2 - \alpha_2 \cdot D\alpha_1 = -H \sqrt[4]{lm} \frac{\mathfrak{I}_{10}^2}{\mathfrak{I}_{00}^2} \frac{\mathfrak{I}_{00}(q)}{\mathfrak{I}_{01}(q)}$$

Setzt man ferner der Kürze halber: $S = f \cdot \sin \sigma + g \cdot \cos \sigma$, $T = f \cdot \cos \sigma - g \cdot \sin \sigma$,

$$Q = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} \cdot \frac{\mathfrak{I}_{01} \mathfrak{I}_{00}(i\omega)}{\mathfrak{I}_{10} \cdot \mathfrak{I}_{00} \cdot \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}^2(i\omega) \mathfrak{I}_{01}^2(q) - \mathfrak{I}_{10}^2(i\omega) \mathfrak{I}_{11}^2(q)}, \text{ so wird:}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mathfrak{I}_{01}^2 \cdot Q \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T \end{aligned} \right\} \\ \beta_2 &= \mathfrak{I}_{00}^2 \cdot Q \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T \end{aligned} \right\} \\ \beta_3 &= \mathfrak{I}_{10}^2 \cdot Q \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T \end{aligned} \right\} \\ \gamma_1 &= \mathfrak{I}_{01}^2 \cdot Q \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T \end{aligned} \right\} \\ \gamma_2 &= \mathfrak{I}_{00}^2 \cdot Q \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T \end{aligned} \right\} \\ \gamma_3 &= \mathfrak{I}_{10}^2 \cdot Q \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S \\ &\sqrt[4]{1} \mathfrak{I}_{10}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot S + \sqrt[4]{-mn} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{-m} \mathfrak{I}_{00}(q) \mathfrak{I}_{11}(q) \cdot S + \sqrt[4]{nl} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot T \\ &\sqrt[4]{n} \mathfrak{I}_{11}(q) \mathfrak{I}_{10}(q) \cdot S - \sqrt[4]{lm} \mathfrak{I}_{01}(q) \mathfrak{I}_{00}(q) \cdot T \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\beta = -\sqrt[4]{1} B C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right) \cdot \frac{\mathfrak{I}_{01} \cdot T}{\mathfrak{I}_{00}(i\omega) \mathfrak{I}_{01}(q)},$$

$$\gamma = \sqrt[4]{1} B C \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right) \cdot \frac{\mathfrak{I}_{01} \cdot S}{\mathfrak{I}_{00}(i\omega) \mathfrak{I}_{01}(q)}.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass zwischen den Constanten l, m, n und den Moduln κ und κ' die Gleichungen bestehen:

$$\kappa \sqrt[4]{1} + \kappa' \sqrt[4]{n} = 1$$

$$\sqrt[4]{1} - \kappa' \sqrt[4]{-m} = \kappa \quad \kappa' \sqrt[4]{1} - \sqrt[4]{-m} - \kappa \sqrt[4]{n} = 0,$$

$$\kappa \sqrt[4]{-m} + \sqrt[4]{n} = \kappa'$$

Letztere Gleichung wurde nach Einführung der Constanten des Körpers oben angeführt als Bedingung dafür, dass $\delta_4 = \delta_5$ sei.

Ergebnis: Es sind im Ganzen neun Fälle ermittelt worden, in denen die Bewegung eines festen Körpers vom Charakter des dreiaxigen Ellipsoids in einer tropfbaren, unzusammendrückbaren Flüssigkeit durch die Umkehrung elliptischer Integrale dargestellt werden kann. Vier Fälle waren nicht wesentlich verschieden von denjenigen, welche Thomson und Tait beschrieben haben. Fünf Fälle sind — soweit mir bekannt — neu. In den Fällen 1—4 gelang die analytische Darstellung der zwölf Coefficienten, welche die Bewegung bestimmen, mit Hülfe von Thetafunction und Exponentialfunctionen, im neunten Falle vermittels Thetafunctionen und trigonometrischen Functionen, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind.

Druckfehler.

Auf Seite 19 ist in den Ausdrücken für $e^{-2\tau}$ und τ_0 statt des Charakters τ_0 der Thetafunction τ_1 zu setzen.
